

Національна академія наук України
Інститут математики

**ВОЛОДИМИР СЕМЕНОВИЧ
КОРОЛЮК**

ТВОРЧИЙ ШЛЯХ

Київ – 2009

Національна Академія наук України
Інститут математики

**Володимир Семенович
Королюк**

Творчий шлях

Київ – 2009

УДК 621.762

Володимир Семенович Королюк. Творчий шлях. – Київ: Інститут математики НАН України, 2009. - 368 с.

В книзі освячено основні етапи життя та наукової діяльності відомого вченого в галузі теорії ймовірностей та математичної статистики, академіка Національної академії наук України Володимира Семеновича Королюка.

Упорядники: Н.Ф.Рябова, І.В.Самойленко

ISBN 978-966-02-5176-2

© Ін-т математики
НАН України. 2009



Трудовому человеку Борису
Николаевичу Мелникову
с наилучшими пожеланиями
сохранить здоровье и
жизнь в согласии с природой
22.04.10. Визир

Зміст

Часть 1

Развитие теории вероятности в Украине	5
Творческий путь	29
Между двумя юбилеями	78
Творчий шлях В.С.Королюка в запитаннях і відповідях	114

Часть 2 Комментарии

Погранслай	123
Случайные блуждания. Граничные задачи	140
Полумарковские процессы и их приложения	142
Случайные эволюции	146
Схема диффузионной аппроксимации процессов с локально независимыми приращениями	150
Проблема устойчивости динамических систем с марковскими переключениями	159

Часть 3 Лекции

Процеси відновлення в схемі апроксимації	162
Проблеми сингулярного збурення в аналізі стохастичних систем	169
Еволюція стохастичних систем. Дифузійний феномен	173
Еволюційні системи з випадковими збуреннями	177
Диффузионная аппроксимация систем и сетей обслуживания	187
Статистическая модель поведения	193
Случайность и провидение	199
СПИСОК УЧЕНИКОВ	203
ФОТОГРАФИИ	208
БИБЛИОГРАФИЯ	211

Часть 1

Развитие теории вероятностей в Украине

В.С. Королук

1. **Введение.** Развитие теории вероятностей и её многочисленных приложений в Украине во второй половине двадцатого столетия, несомненно, основано на деятельности выдающегося ученого и педагога, академика Академии наук Украины Бориса Владимировича Гнеденко.

За сравнительно короткий исторический период в 15 лет (с 1945 по 1960 г.) Б.В.Гнеденко создал в Украине всемирно известную ныне математическую школу по теории вероятностей и математической статистике. В настоящее время уже четвёртое поколение его учеников насчитывает десятки докторов наук и профессоров, сотни кандидатов наук. Среди учеников Бориса Владимировича, по крайней мере, десять членов Академии Наук Украины.

Разумеется, и до Б.В.Гнеденко в Украине работали выдающиеся ученые, имена которых навсегда останутся в истории развития теории вероятностей: А.М.Ляпунов, С.Н.Бернштейн, Е.Е.Слущкий, М.Ф.Кравчук, Н.Н.Боголюбов. Вместе с тем, по разным причинам, не все они оставили после себя активно действующих учеников, которые оказали ощутимое влияние на исследования по теории вероятностей в Украине, за исключением, конечно, Н.Н.Боголюбова.

2. **Начальный этап.** А всё начиналось со Львова в 1945 году, куда Борис Владимирович (в дальнейшем Б.В.) переехал из Москвы по приглашению Академии наук Украины. Избранный ее членом-корреспондентом, молодой, энергичный ученик А.Я.Хинчина и А.Н.Колмогорова, по результатам совместных со своими учителями исследований, готовил в это время рукопись книги "Предельные распределения для сумм независимых случайных величин". Издание этой книги в 1949 году стало историческим событием в развитии современной теории вероятностей. Монография Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова знаменовала собой завершение классической проблематики теории сходимости распределений сумм независимых случайных величин, в развитии которой принимали участие многие выдающиеся математики в течение нескольких столетий. Можно теперь утверждать, что эта монография стала путеводной звездой в развитии современной теории предельных теорем для случайных процессов, которая занимает ведущее положение в творчестве современных специалистов по теории вероятностей. В начале же 50-х годов эта монография была источником многочисленных задач, которые могли быть решены методами,

созданными Б.В.Гнеденко и его выдающимися учителями - А.Я.Хинчиным и А.Н.Колмогоровым.

Период с 1945 по 1949 г. описан в воспоминаниях Бориса Владимировича Гнеденко.

Работая во Львове, Б.В. часто бывал в Киеве и осенью 1949 г. создал отдел теории вероятностей в Институте математики, возглавил кафедру алгебры, анализа и теории вероятностей в Киевском университете.

3. Начало работы с Б.В. До появления Б.В. в Киевском университете читался только один обязательный курс по теории вероятностей (32 часа) И.И.Гихманом, учеником Н.Н.Боголюбова. При наличии таких энергичных, увлечённых творчеством и преподаванием учёных, как М.Г.Крейн, С.Г.Крейн, М.А.Красносельский, С.Я.Зуховицкий, Г.И.Кац и др., трудно было надеяться, что интересы студентов будут направлены к теории вероятностей.

С приездом Б.В. всё кардинально изменилось. Ещё до окончательного переезда в Киев Б.В. предложил темы дипломных работ. В 1949 году огромное счастье выпало и мне: я был как раз студентом 5-го курса механико-математического факультета КГУ. Для завершения образования в университете мне оставалось только написать дипломную работу. Впервые увидев Б.В. на заседании Учёного совета факультета осенью 1949 года, выступающего с яркой, энергичной речью, я без колебаний принял решение стать учеником Бориса Владимировича Гнеденко.

Тему дипломной работы выбирал по наитию, внимая лишь звучанию слов: "Область притяжения устойчивых законов", которые у меня ассоциировались с топологической тематикой. Мы в это время на семинаре М.А.Красносельского изучали комбинаторную топологию. С начала 1950 года Б.В. уже жил и работал в Киеве. Он организовал семинар по теории вероятностей, на котором обсуждались также темы дипломных работ. К тому же все темы были основаны на знаменитой монографии, написанной во Львове совместно с А.Н.Колмогоровым. Она ещё не поступила в библиотеки, но была доступной студентам и аспирантам в виде гранок, переданных нам Б.В. для работы. Изучение областей притяжения устойчивых законов, уже осуществлённое Б.В. и описанное в монографии, служило исходным в моём анализе. После нескольких бессонных ночей я приготовил 15 страниц более или менее сложных вычислений, основанных на методах, изложенных в монографии, получил достаточно простые условия выбора нормированных констант.

Это был решающий момент моего знакомства с Б.В. Он внимательно проанализировал мою работу. Убедившись таким образом в моем стремлении к творческому поиску, Б.В. предложил мне совершенно иной путь решения проблемы: исследовать условия притяжения к устойчивым законам в терминах характеристических функций. Я, конечно, понимал,

что новый подход Б.В. мог реализовать самостоятельно. Он подарил мне эту задачу, когда поверил в мои творческие возможности. Первая моя научная работа была опубликована в журнале "Доповіді Академії наук" вместе с моим учителем Б.В.Гнеденко в 1951 году. С тех пор я стремлюсь привлекать своих учеников к творчеству, не только формулируя проблему, но и подсказывая возможные методы её решения. Пожалуй, трудно придумать более эффективный путь вхождения в научное творчество, чем анализ проблемы, уже рассмотренной, но не завершённой до конца. Впрочем, такой подход требует от учителя щедрости. А Б.В. был, безусловно, щедрым учителем, которому успехи ученика доставляли такую же радость, как и собственные достижения.

4. Формирование школы. Год за годом в орбиту Б.В. увлекались лучшие, талантливые студенты старших курсов, для которых он читал лекции. Так, вскоре после меня аспирантами Б.В. стали В.С.Михалевич, А.В.Скороход, Г.Н.Сакович, Ю.П.Студнев, С.Колотошин. И за каждого аспиранта надо было бороться. Руководство факультета, особенно партийной организации, инстинктивно и целенаправленно стремилось сохранить незыблемость серой массы преподавателей, для которых научное творчество было запредельной деятельностью, нарушающей установленный ритм коллектива. Находят "неопровержимые" доказательства того, что Глеб Сакович (крещеный в православной церкви) — еврей, что Анатолий Скороход сотрудничал с немецкими оккупантами (это в 11-13 лет!). О моём поступлении в аспирантуру не могло быть и речи. Тут уж "козыри" у парторга были бесспорные: отец осуждён на 15 лет за то, что работал агрономом подсобного хозяйства под Киевом в 42-43 гг.

Б.В. написал "гарантийное письмо" ректору Киевского университета, в котором он ручался за мою благонадёжность.

Однако ректор Б.Г.Боднарчук не только не признал доводы Б.В., но даже не выдал мне диплома с отличием на руки, что было положено по закону. Так что я должен был ехать по направлению в северный Казахстан, г.Акмолинск, работать учителем математики в техникуме.

5. Выбор научного направления. Удивительно, и в то же время логично было решение Б.В. изменить тематику научного поиска, обратив внимание на распределения статистических непараметрических критериев. Знаменитые теоремы А.Н.Колмогорова и Н.В.Смирнова, сформулированные и доказанные в 1933 и 1939 гг., привлекли внимание многих математиков мира.

Интерпретация Донскера теоремы А.Н.Колмогорова в виде принципа инвариантности в предельных теоремах для распределений вероятностей функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин послужила источником бурного потока исследований, вскоре превратившегося в новое направление теории вероятностей —

предельные теоремы для случайных процессов. Эмпирический процесс — разность между эмпирической функцией распределения, построенной по результатам конечного числа испытаний, и *теоретической* функцией распределения случайной величины, значение которой наблюдается в испытаниях, — послужил стартовым объектом разнообразных проблем и методов анализа в предельных теоремах теории вероятностей. Дело в том, что эмпирический процесс в простейшем случае, и в то же время без ограничения общности, равномерного теоретического распределения, можно рассматривать как пуассоновский процесс с положительными скачками, равными единице, и отрицательным равномерным сносом, со скоростью, также равной единице, при условии, что не только начальное значение процесса, но и конечное, равны нулю. Таким образом, распределение статистики Колмогорова совпадает с распределением максимума модуля "условного" пуассоновского процесса со сносом.

Когда я, будучи аспирантом А.Н.Колмогорова (после отъезда Б.В. в Германию (см. далее)) в 1954 г., показал ему исходное уравнение для распределения статистики Колмогорова, полученное для распределения пуассоновского процесса со сносом, он стал говорить мне, что в его работе также использовано распределение Пуассона. Впоследствии, получив доступ к работе А.Н.Колмогорова, опубликованной в 1933 г. на итальянском языке, я смог убедиться в справедливости его слов, однако, пуассоновский процесс со сносом А.Н.Колмогоров не использовал.

Возвращаясь к принципу инвариантности Донскера, можно с уверенностью утверждать, что сформулированная Донскером проблема содержала в принципе как частный случай проблему нахождения предельного распределения для непараметрических статистик Колмогорова и Смирнова. Как раз статистика Смирнова — разность между двумя эмпирическими функциями распределения — и может быть интерпретирована как "условное" случайное блуждание сумм независимых, одинаково распределённых случайных величин, принимающих только два значения, при условии фиксированного значения как начальной, так и конечной суммы.

Как видим, принцип инвариантности Донскера для сумм независимых случайных величин, с одной стороны, является более общей задачей, чем задача асимптотического анализа распределения статистики Смирнова, а с другой стороны, — принцип инвариантности является упрощением проблемы анализа распределений статистик Колмогорова и Смирнова. Однако не составляет труда полностью вложить проблему изучения непараметрических статистик в "принцип инвариантности". Здесь проявляется общая методология математики: новые проблемы возникают в результате обобщения рассматриваемых частных задач, однако при этом, в "разумной" постановке проблемы исключаются некоторые частные условия исходных задач.

Б.В.Гнеденко с присущей ему удивительной интуицией предложил А.В.Скороходу изучить мемуары Донскера в поисках новых задач, а на семинаре предложил найти точное распределение статистики Смирнова в частном случае равенства объёмов выборочных данных. И хотя в 1951 году я ещё не был аспирантом Б.В., а был преподавателем в Артёмовском учительском институте, наведываясь в Киев к своим родным, посещал семинар Б.В. Я увлёкся задачей, предложенной Б.В., и в результате критерии согласия Колмогорова и Смирнова стали темой моей кандидатской диссертации, защищённой в Институте математики в 1954 году.

А.В.Скороход извлёк из мемуаров Донскера проблему построения метрики в пространстве функций без разрывов второго рода, которая теперь является общепризнанной в теории случайных процессов.

И.И.Гихман, в арсенале которого уже было выдающееся творческое достижение — понятие стохастического дифференциала, увлёкся проблемой асимптотического анализа распределений статистики Колмогорова в случае эмпирически определяемых параметров теоретического распределения. Результаты асимптотического анализа статистик Колмогорова стали предметом докторской диссертации И.И.Гихмана.

Как видим, Б.В.Гнеденко удачно определил направление научного поиска для коллектива вероятностников кафедры КГУ и отдела теории вероятностей Института математики.

Итак, решая поставленную Б.В. задачу, я вместе с Б.И.Ярошевским (аспирантом Б.В.) нашёл искомое распределение статистик Смирнова, используя схему построения аналогичной формулы для распределения Колмогорова, которая уже была известна. Но громоздкость полученных результатов порождала сомнения в адекватности подхода. И здесь помогла удача. Я обнаружил у букиниста книгу С.Чандрасекара "Стохастические проблемы в физике и астрономии". В этой книге я нашёл геометрический подход в анализе граничных задач для случайных блужданий. Так возник метод траекторий, при помощи которого распределение статистики Смирнова, при равных объёмах двух выборок, выражается удивительно красивой формулой. Окончательный вариант доказательства я нашёл в поезде по дороге из Киева в Артёмовск и тут же отправил открытку Б.В. с ближайшей промежуточной станции. Вскоре появилась наша совместная статья в "Доповідах" Академии наук (1951, т. 80, №4). Здесь уместно привести оценку нашего результата, данную В.Феллером в книге "Введение в теорию вероятностей и ее приложения" (изд. Мир, 1967, т. 2, стр. 56): "Распределение статистики $D_{n,n}$ (Смирнова) было найдено с помощью громоздких вычислений и исследований, но в 1951 году Гнеденко и Корольок показали, что вся проблема сводится к задаче случайного блуждания с хорошо известным результатом. Их

доказательство отличается изяществом..." И далее на стр. 57 по поводу вычисления предельных распределений статистик Колмогорова и Смирнова В.Феллер утверждает: "Эти вычисления очень сложны и не объясняют связи с диффузионными процессами, что, наоборот, свойственно подходу Гнеденко-Королука".

Я был удивлен (откровенно говоря - разочарован), когда узнал, что Б.В. поручил своим ученикам Е.Л.Рвачевой и В.С.Михалевичу изучать распределения статистики Смирнова при более общих условиях вместо того, чтобы предложить эти новые задачи мне. Впоследствии я понял творческий стиль Б.В.: обеспечить наиболее эффективные условия коллективного творчества, создавая действительно научную школу единомышленников. Если тематика перспективна и дорога к успеху просматривается, надо привлекать всех желающих идти по этому пути. Богаче будет урожай. Б.В.Гнеденко всегда щедро делился со своими учениками проблемами, которые он понимал.

В 1955 г. была опубликована монография А.Я.Хинчина "Математические методы теории массового обслуживания", в которой, можно сказать, впервые были изложены в строгой математической форме основы теории систем обслуживания.

И тут Б.В. оказался пионером, активно пропагандируя задачи систем обслуживания среди своих учеников, студентов университета, военных инженеров. Классические задачи теории систем обслуживания при дополнительных ограничениях на время пребывания требований в системе обслуживания становились новыми задачами, пограничными между теорией систем обслуживания и теорией надёжности.

Благодаря инициативе Б.В.Гнеденко, в Украине сложились новые направления творческого поиска в области предельных теорем и асимптотического анализа для случайных процессов (И.И.Гихман, В.С.Королук, А.В.Скороход, Ю.П.Студнев), в теории непараметрических статистических критериев (И.И.Гихман, В.С.Королук, Б.И.Ярошевский, В.С.Михалевич, Е.Л.Рвачева), в теории систем обслуживания и теории надёжности (С.М.Броди, Т.П.Марьянович, Н.В.Яровицкий, И.Н.Коваленко, В.С.Королук). Напомню, что Е.Л.Рвачева и В.С.Михалевич также занялись анализом распределений непараметрических статистик.

Далее всё зависело от привходящих обстоятельств: таланта и жергии учеников, удачном развитии исследований, по возможности пополнять кафедру в университете и отдел новыми талантливыми молодыми математиками.

6. Командировка Б.В. в Германию. Привходящим фактором оказалась командировка Б.В.Гнеденко в Германскую Демократическую Республику, в Берлинский университет в 1953-1954 гг. Сталинский режим

стремился закрепиться в восточной оккупированной зоне Германии всеми возможными средствами, в том числе используя научное сотрудничество.

Перед поездкой в Германию Б.В. позаботился о своих учениках. Он договорился с А.Н.Колмогоровым о приеме в аспирантуру Московского университета троих украинцев: В.С.Королюка, А.В.Скорохода и В.С.Михалевича. Как по волшебству, перед нами открылись двери нового здания МГУ на Ленинских горах. Мы получили прекрасные комнаты в аспирантском общежитии, а главное, получили возможность посещать лекции профессоров Московского университета, принадлежащих к знаменитой московской математической школе, созданной выдающимся математиком Н.Н.Лузиным. Участие в семинарах математического факультета МГУ, работа в чудесной библиотеке, общение с московскими математиками различных поколений оставило неизгладимый след в нашей творческой жизни. Нас, аспирантов Б.В., при содействии А.Н.Колмогорова зачислили в Московский университет аспирантами А.Н.Колмогорова (меня и В.С.Михалевича) и Е.Б.Дынкина (А.В.Скорохода) — и это было поистине царским подарком Б.В. Мы приобщились к замечательной, не имеющей себе равных в мире, математической школе. Время в МГУ — это время нашего созревания как математиков. И после возвращения из Москвы мы продолжали оставаться учениками Б.В., целиком полагаясь на его научный авторитет и житейскую прозорливость.

Для Б.В. эта командировка послужила переломным этапом в его творческой деятельности. Однажды, на Вильнюсской конференции по теории вероятностей, А.Н.Колмогоров обронил невзначай: "Борис Владимирович после поездки в Берлин здорово изменился — стал таким научным организатором. А ведь у него ещё много времени для творчества". Б.В. в 1954 году было всего 42 года.

Возвращение Б.В. из Германии было триумфальным. Б.В.Гнеденко стал директором Института математики, академиком-секретарём Отделения математики и механики, членом Президиума АН Украины.

Кафедра в Киевском университете разделилась: были созданы кафедра алгебры, которую возглавил профессор Л.А.Калужнин, а также кафедра анализа во главе с профессором Г.Е.Шиловым. Кафедра теории вероятностей продолжала свою иррегулярную самостоятельную жизнь под руководством Б.В.

7. Становление кибернетики в Украине. В начале 1950-х годов, как известно, кибернетика в Советском Союзе подвергалась гонениям как буржуазная лженаука, созданная Н.Винером — американским учёным. Вместе с тем в научных лабораториях Америки, Англии и других стран интенсивно велись разработки конструкций электронных вычислительных машин, способных автоматически выполнять сложные расчёты по заранее заданным программам. Аналогичная лаборатория существовала и в Украине в Феофании, на территории бывшего монастыря под Киевом. Под

руководством академика Академии наук Украины С.А.Лебедева здесь была создана действующая модель вычислительной машины МЭСМ (первая в континентальной Европе). Но в связи с переездом С.А.Лебедева в Москву, где он возглавил Институт вычислительной техники, организованный для более эффективного дальнейшего развития вычислительной техники, имеющей несомненные перспективы в обеспечении решения проблем военно-промышленного комплекса, Киевская лаборатория вычислительной техники Института электротехники осталась без научного руководства.

Б.В. добился перевода лаборатории в Институт математики и сам ее возглавил. Понимая, что для возрождения исследований в области вычислительной техники необходимо привлечь новые творческие силы, Б.В. предложил своим ученикам Е.Л.Рвачёвой, В.С.Михалевичу и мне, а также профессору КГУ Л.А.Калужнину принять участие в разработке новой вычислительной машины широкого профиля. Инженерные кадры были вполне работоспособные. Необходимо было лишь обеспечить должное научное руководство. После энергичного поиска Б.В. пригласил В.М.Глушкова (доктора физико-математических наук по алгебре, ученика А.Г.Куроша) переехать в Киев и возглавить лабораторию.

В.М.Глушков некоторое время колебался, видимо побаивался переключаться с абстрактных алгебраических проблем (он получил блестящий результат по 23-й проблеме Гильберта) на прикладные исследования по вычислительной математике, да и перспектива жить за Киевом, в Феофании его не устраивала (в то время единственным надёжным транспортом был "катафалк" — допотопный автобус, регулярно привозивший на работу и увозивший с работы сотрудников лаборатории). Б.В. уговаривал не только словами. Он предложил В.М.Глушкову свой директорский автомобиль, особняк в Феофании и пообещал квартиру в Киеве. Решающее слово, по-видимому, было за женой В.М. Ей очень понравился Киев, а перспектива жить за городом не очень её пугала. Тем более, что одним из условий В.М.Глушкова было предоставление ему квартиры в Киеве.

Жизнь лаборатории резко оживилась. Инженеры, которых С.А.Лебедев оставил в Киеве, с энтузиазмом принялись за разработку схем новых вычислительных машин "Киев", "Днепр" и др. Б.В. вместе с Л.А.Калужниным организовал семинар в КГУ по теории алгоритмов и алгебре логики для студентов старших курсов. Мне Б.В. предложил читать курс программирования для ЭВМ на 5-м курсе, чтобы спустя год получить подготовленных к работе в лаборатории молодых специалистов.

Б.В. не только создал платформу для обучения новых кадров вычислителей-программистов — он организовал наш переезд в Феофанию. В.С.Михалевича он поселил в новый финский коттедж, правда, в одну (меньшую) комнату, а меня — в бывший особняк,

стоявший на холме, над дорогой, выделив в нем же для М.И.Ядренко комнату с отдельным входом. Начался удивительный период феофанийской жизни, период "бури и натиска". В.М.Глушков вскоре активно включился в работу лаборатории, определив своё научное направление — теория абстрактных автоматов. Это был весьма удачный выбор. Сохраняя абстрактный уровень рассматриваемых задач и вместе с тем, имея вполне конкретные реальные системы — ЭВМ в качестве объектов математического анализа, В.М.Глушков становится научным лидером лаборатории. Интерес Президиума АН к нашей тематике заметно возрос.

Стараясь стать единоличным лидером в развитии кибернетики в Украине, В.М.Глушков вскоре после создания Вычислительного центра АН Украины оттеснил Б.В.Гнеденко от участия в организации исследований по кибернетике, отторг от Б.В. его ближайших учеников: Е.Л.Рвачёву (Ющенко по мужу) и В.С.Михалевича, предложив им заведование отделами в ВЦ и квартиры в новом доме. Мне также был предложен выбор: заведовать отделом ВЦ и квартира или оставаться в Институте математики старшим научным сотрудником в отделе Б.В.

Несмотря на то, что в конце 1950-х годов, когда создавался ВЦ, я активно занимался в основном программированием для вычислительных машин, для меня не было альтернативы. Я всегда был уверен, что моя ведущая специальность — теория вероятностей, моё положение — сотрудник отдела Б.В. В итоге я получил лишь две комнаты в трехкомнатной квартире с соседом. Разумеется, помехой для В.М.Глушкова был Б.В. как академик-секретарь отделения. Б.В.Гнеденко, как все талантливые люди, обладал независимым характером, нетерпимостью к ограниченности, подхалимству, подлости. Обладая ярким умом и острым языком, Б.В.Гнеденко легко наживал себе противников в административной системе Академии наук, всегда живущей по установившейся традиции - безусловное чинопочитание. В Президиуме АН у него было достаточно недоброжелателей, которые хотели бы устранить Б.В. из Президиума. Легко понять, что В.М.Глушков нашёл себе соратников в Президиуме, среди которых, в частности, был и главный ученый секретарь Президиума. Кстати, В.М.Глушков также легко наживал себе противников, однако он умел, занимая ведущее положение, обеспечивать себе поддержку в верхах и безусловную покорность подчиненных.

8. Отношение к ученикам. Б.В.Гнеденко обладал удивительным человеческим качеством: умением свободно общаться с любым человеком, способным откликнуться на его внимание. При этом не имело никакого значения общественное положение собеседника. Не имея возможности часто бывать в Киеве, я поручил своему старому другу Пете З., студенту философского факультета КГУ, обсудить с Б.В. перспективы моего

поступления в аспирантуру Института математики в 1951 году. Вскоре я получил от Петра восторженное письмо, в котором он восхищался дружелюбием Б.В., его сердечностью, пониманием житейских проблем. Б.В. был скуп на похвалы, но зато очень внимателен к своим ученикам, когда у них возникали трудности в жизненном обустройстве. Я убеждён, что Б.В. имел достоверную информацию о каждом своем ученике и всегда с предельным вниманием и энергией включался в решение проблем учеников. Мы со своей стороны боготворили Б.В., жадно внимали его удивительно краткой и образной речи, восторгались его реакцией на реплики собеседника, его ассоциативному образному мышлению. Жаль, очень жаль, что Б.В. не оставил подробных характеристик своих ближайших учеников. Это был бы ценнейший педагогический материал. Нам, со своей стороны, трудно сейчас воссоздать достоверный портрет нашего учителя Бориса Владимировича Гнеденко.

Каждое заседание семинара с участием Б.В. было праздником. Мы с удовольствием следили за ходом его мыслей, его анализом проблемы, его глубокой эрудицией. И после семинара мы не торопились расставаться с Б.В., долго стояли у входа в университет, затем шли провожать его до самого дома. Это стало нашим ритуалом.

А ещё незабываемые обеды у Б.В., в день его рождения 1-го января. Однажды мы втроем — я, А.Скороход и В.Михалевич — пришли к Б.В. с коробкой конфет, на которой были изображены три известных русских богатыря. С тех пор Б.В. часто называл нас своими "богатырями".

Вера наша в своего учителя была безусловна. Поступая в аспирантуру Института математики осенью 1951 года, я уволился из Артёмовского учительского института. К тому времени я был уже женатым и в перспективе у меня должен был появиться сын.

При этом надо иметь в виду, что в те годы мои шансы попасть в аспирантуру были минимальны. Учёный секретарь Института математики уговаривал меня, что и без аспирантуры можно заниматься научным творчеством. Однако в тот раз Б.В. победил. Я был принят в аспирантуру ИМ осенью 1951 года, связав тем самым навсегда свою жизнь с Институтом математики Национальной академии наук Украины. Я благодарен судьбе и, прежде всего Б.В.Гнеденко, создавшего мой жизненный путь в науке.

9. Украинская школа по теории вероятностей. С самого начала развития исследований по теории вероятностей и её разнообразным приложениям в Украине Б.В.Гнеденко организовал исследования в области предельных теорем и асимптотического анализа для случайных процессов, в области теории непараметрических статистических критериев согласия, а также в области систем обслуживания и теории надежности систем.

Уже в сентябре 1953 года в Киеве по инициативе Б.В.Гнеденко было проведено 3-е Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике. Это была, по сути, первая представительная конференция, в которой принимали участие почти все специалисты по теории вероятностей и математической статистике того времени в Советском Союзе: А.Н.Колмогоров, Н.В.Смирнов, Ю.В.Линник, М.Г.Крейн, Т.А.Сарымсаков, А.М.Обухов, молодое поколение вероятностников — Ю.В.Прохоров, Е.Б.Дынкин, Р.Л.Добрушин и др. Конечно же, в конференции принимали активное участие (в организации и с докладами) представители украинской вероятностной школы — Б.В.Гнеденко, И.И.Гихман, А.А.Бобров, В.С.Королук, А.В.Скороход, В.С.Михалевич и др.

В заключительный день конференции была сделана фотография всех участников, которую можно считать исторической.

В последующие годы украинская вероятностная школа пополнялась новыми активно работающими специалистами, воспитанниками кафедры теории вероятностей Киевского университета, которой до 1960 года руководил Б.В.Гнеденко, затем И.И.Гихман, а с 1964 года заведующим кафедрой теории вероятностей стал ученик И.И.Гихмана — М.И.Ядренко (второе поколение учеников Б.В.). С тех пор украинская школа по теории вероятностей регулярно пополнялась лучшими выпускниками Киевского университета, успешно заканчивавшими аспирантуру под руководством первого, а затем и второго поколения учеников Б.В., и вскоре становились докторами наук, а в дальнейшем — и членами Академии Наук Украины.

Думаю, Б.В.Гнеденко является одним из самых уникальных учителей, у которого среди его учеников только членов Национальной Академии Наук Украины, по крайней мере, десять человек: академики НАН Украины — В.С.Королук, А.В.Скороход, В.С.Михалевич, И.М.Коваленко, Ю.М.Ермольев; члены-корреспонденты НАН Украины — И.И.Гихман, Е.Л.Ющенко (Рвачёва), М.И.Ядренко, Н.И.Портенко, Т.П.Марьянович.

Не случайно А.М.Самойленко как-то во время сессии Академии Наук обронил: "Чтобы быть избранным в члены академии, нужно молиться вероятностному богу".

В середине 1960 — 1970-х годов сформировалась новая традиция чтения специальных курсов (а иногда и общих) в различных университетах Украины и других республик Советского Союза. Так влияние киевской вероятностной школы распространялось по всей Украине и за её пределами. Думаю, что в настоящее время "украинская вероятностная диаспора" за пределами Украины не менее многочисленна, чем её представители в Украине. И эта традиция была инициирована Б.В.Гнеденко, который и после переезда в Москву, в Московский университет, не оставлял без внимания своё детище в Украине, регулярно

наведываясь в Киев, проводя семинары и консультации со своими учениками. В связи с активным участием Б.В. в жизни украинской вероятностной школы и после отъезда из Киева весьма странным представляется решение Президиума Академии Наук Украины о прекращении ему выплат за академическое звание.

Привожу письмо Б.В. президенту Академии по этому поводу:

"Глубокоуважаемый Александр Владимирович!

Мной получена выписка из постановления Президиума Академии от 20.02.1961 г. относительно прекращения выплаты за звание. Я благодарю Президиум за своевременное извещение о принятом решении.

Одновременно считаю необходимым сообщить следующее: суммы, которые переводились мне за звание, я использовал для систематических поездок в Киев (не менее двух раз в месяц) с целью проведения научного семинара в Институте математики, руководства двумя научными проблемами, консультаций аспирантам и научным работникам, выполнения обязанностей по редакции Докл. АН УССР и по Главной редакции УРЭ (обсуждения статей по математике, правка предлагаемых текстов, распределение заказов и пр.).

Поскольку в принятом Вами постановлении не содержатся никаких дополнительных разъяснений, его можно расценить только как стремление Президиума к прекращению выполнения указанных только что работ. Поэтому я считаю себя свободным от возложенных на меня Академией обязанностей и от систематических поездок в Киев.

Само собой разумеется, что я по-прежнему готов оказывать консультационную помощь моим бывшим сотрудникам и аспирантам, если только Президиум найдёт целесообразным их откомандирование в Москву на необходимые сроки. Это замечание относится и к возможности выполнения мной отдельных спорадических поручений Академии.

(Б.Гнеденко)"

А вот комментарии Б.В. в письме ко мне.

"Дорогой Владимир Семёнович!

Направляю Вам копию письма, которое я сегодня отправляю Палладину. Решение Президиума, как я уже говорил Вам, лишает меня возможности систематических поездок. С этой копией Вы вольны поступить так, как найдёте нужным: можете её бросить в мусорную корзину, передать Митропольскому или Парасюку, показать Фещенко и пр.

Из Беркли получил наш совместный доклад в английском переводе. Нейман пишет, что доклад оставил у него большое впечатление.

Постараюсь сейчас внимательно прочесть его в английском варианте. Это нужно делать скорее, так как завизированный текст я должен вернуть как можно быстро. Досадно, что нет возможности выслать Вам и Скороходу текст для ознакомления с качеством написанного и перевода.

Дорогой Владимир Семёнович! Поскольку в ближайшую пятницу я не собираюсь приезжать, очень прошу Вас обсудить с "массовой" молодежью, что им делать. Быть может, им разумно приехать сюда в командировку. Единственное, что я не могу им гарантировать и в чём не стану оказывать помощь, — это в раздобывании места в общежитиях и гостиницах.

Привет всем вероятностникам."

10. Влияние Б.В. на творческую мысль в Украине продолжалась в течение всей его жизни в Москве. Приведу пример, связанный с моей научной деятельностью. В начале 1960-х годов Б.В. получил впервые асимптотические результаты в анализе дублированных систем с произвольно распределёнными временами работы и восстановления приборов. В это же самое время в Институте математики, на семинаре, обсуждалась теория полумарковских процессов, изложенная в статьях Р.Пайка. Анализируя результаты, полученные Б.В., я пришёл к заключению, что проблема анализа времени безотказной работы восстанавливаемых систем может быть сформулирована в общем виде как проблема изучения времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний. Так, под влиянием работ Б.В. возникло новое направление в теории надёжности — асимптотический анализ полумарковских процессов в схеме фазового укрупнения. Кстати, и уточнение названия этого направления принадлежит Борису Владимировичу, который при обсуждении предварительных результатов указал, что рассматриваемая схема укрупнения является, конечно, схемой фазового укрупнения, поскольку в асимптотическом анализе укрупняются (сливаются, объединяются) фазовые состояния полумарковского процесса.

Далее, не менее значимое влияние Б.В. было и на творчество И.Н.Коваленко. Достаточно заметить, что становление И.Н.Коваленко как специалиста в области теории надёжности стохастических систем проходило под непосредственным патронатом Б.В. Творческое содружество Б.В. и И.Н.Коваленко реализовано в хорошо известной монографии по теории систем обслуживания. Разумеется, творческая жизнь в Украине проходила по своим внутренним законам, сохраняя и приумножая традиции, заложенные Б.В.Гнеденко. Однако определяющие принципы сотрудничества — доброжелательность, заботливое внимание к начинающему талантливому ученику, щедрость в распространении идей и методов и даже постановок задач — всегда были цементирующим

началом в жизни украинской вероятностной школы. Мне хочется надеяться, что и будущее поколение всроятностников в Украине (и не только в Украине) всегда будут верны заветам нашего Учителя, Бориса Владимировича Гнеденко.

11. Портрет Учителя. С самого начала нашего знакомства с Борисом Владимировичем и после его ухода мое отношение к учителю было благоговейным. В своих воспоминаниях я, как-то подробно рассказал о своей мечте встретить академика, который предложит мне поступить к нему в аспирантуру, (см. раздел II.3 Неожиданный провал). В связи с провалом экзамена по математическому анализу в Харьковском университете я, чтобы утешить себя, придумал сказку, как на защите дипломной работы седовласый академик, пораженный моим творчеством, приглашает меня в аспирантуру.

Реальность оказалась более изобретательной. Б.В. сначала подверг меня испытанию, предложив найти условия задания нормирующих констант в предельных теоремах сходимости к устойчивым законам, а затем сформулировал задачу об устойчивости законов, принадлежащих области притяжения устойчивого закона, отличного от нормального. Мне удалось построить контрпример к гипотезе Гнеденко, и это была моя первая самостоятельная работа, опубликованная в Докладах АН Украины. И тогда Б.В. написал отзыв на мою дипломную работу, который был и характеристикой как для работы в высшем учебном заведении, так и в научно-исследовательском институте.

Вскоре моя мечта всё же сбылась, и осенью 1951 года я стал аспирантом Б.В. в Институте математики. С тех пор моя жизнь всегда находилась под влиянием Б.В. Каждая, встреча с ним, беседа на научную тему и даже по житейским проблемам всегда окрыляла меня, как глоток чистого горного воздуха.

Для меня Б.В. был сияющей вершиной, недостижимой для простых смертных, и в то же время доступной для обозрения, общения и вдохновения. Обладая блестящей памятью, острым и ярким языком, Б.В. всегда поражал нас нестандартными характеристиками своих учеников и коллег, удивляя нас даром предвидения последствий тех или иных действий административных чиновников. Настойчивость Б.В. при решении проблем была потрясающей. Никто, даже враги, не могли устоять перед убедительными аргументами Б.В. Так было при переводе лаборатории вычислительной техники в Институт математики, при организации кафедры математического анализа, так было и при моём поступлении в аспирантуру и во многих других случаях, когда Б.В. был уверен в своей правоте. Б.В. буквально сражал своих противников сарказмом и находчивостью в дискуссиях. Вспомним, например, реплику Б.В. на обвинение его и великодержавном шовинизме в связи с тем, что книга "Очерки по истории математики в России" была написана на

русском и языке. Б.В. тогда ответил: "А вы что, считаете В.И.Ленина также шовинистом?" И спор был исчерпан. Б.В. легко наживал себе врагов среди чиновничьей братии потому, что всегда был уверен - если проблема ясна, нет предмета для дискуссии. А ведь можно было прикинуться простачком, убеждая чиновника в том, что истоки возникновения проблемы он сформулировал первым. Естественность в поведении, без академического величия и в то же время интеллектуальное превосходство — всегда были для нас очаровывающими чертами характера Б.В. Он никогда не пропускал промахов — как в научном исследовании, так и в решении гражданской проблемы. Однако его замечания никогда не оскорбляли виновника (если он, конечно, служил истине), не унижали и не создавали атмосферы безнадёжности.

Как важно при обнаружении ошибок в работе поддержать ученика, ненавязчиво вдохновить его на поиск новых путей решения задачи. Для Б.В. такой подход был естественным состоянием души. Всегда готовый прийти на помощь — научную, материальную или моральную — Б.В. неизменно осуществлял такую помощь, не придавая своим действиям существенного значения. Это часто вводило в заблуждение его учеников. Им начинало казаться, что они этого заслуживают. Всматриваясь назад, в уже туманные в памяти наши с ним встречи, беседы и дискуссии, я с огромным сожалением констатирую, что внешне был равнодушен к его советам и поддержкам, не умел выразить мою благодарность и благоговение, считая такую реакцию чрезмерной и бутафорной. А ведь каждому человеку, в сущности, приятно услышать слова благодарности и почтения, когда ты чувствуешь, что этого заслуживаешь. Б.В. всегда был естественным в своих благодеяниях и, конечно же, испытывал удовлетворение от свершения добрых дел. И всё-таки добрые слова благодарности всегда способствуют энергии добра.

Б.В. был нетерпим к чинопочитанию, подхалимству, подлости и интригам. Здесь он был беспощаден. Сарказм сражал наповал чиновника, который становился его безусловным врагом. Мне кажется, что в этом Б.В. был чересчур крут. Иногда, ради общего дела, следует "поступиться принципами" и сделать вид, что не замечаешь интриг, с тем, чтобы обратить эти интриги против интригана. Но нет, Б.В. не мог себе позволить, просто не умел хитрить и изворачиваться. Думаю, что когда проблема для него была ясна, то Б.В. даже не пытался убеждать других в своей правоте. Он считал при этом, что очевидность проблемы требует ясного, однозначного подхода в своем решении. А в жизни, конечно, все бывало значительно сложнее, возникали и неожиданные сбои. История с выборами М.Г.Крейна в академики тому примером. Будучи академиком-секретарём отделения математики и механики, Б.В.Гнеденко перед очередной выборной сессией Академии Наук Украины написал докладную записку Президенту Академии, в которой убеждал, что в настоящее время,

кроме кандидатуры М.Г.Крейна, он не видит подходящих кандидатов в академики. В ней было совершенно четко изложено, почему на очередной сессии АН следует избрать М.Г.Крейна. В представленной Б.В. докладной записке фактически исключались другие возможные кандидаты. А вот этого делать не следовало. Тут же появились альтернативные варианты, и в результате М.Г.Крейн так и не был избран академиком Академии Наук Украины. И до сих пор этот удивительный факт заставляет задуматься — всё ли совершенно в процедуре выборов новых членов академии?

12. Домашняя обстановка. Я уже упоминал о наших визитах к Б.В. 1 января на праздничный новогодний обед с индюшкой. Это был также день рождения Б.В. В доме всем заправляла супруга Б.В., Наталия Константиновна, удивительно внимательная, ненавязчивая, гостеприимная. Стол поражал нас изобилием и красотой. Впервые я увидел изумительные цветные хрустальные бокалы, миниатюрные серебряные рюмки для крепких напитков, которые появлялись на десерт к чаю.

Квартира Гнеденко всегда поражала меня уютом, атмосферой благожелательности и гостеприимства. И в доме на Ленинских горах, в Москве, квартира Б.В. в университетском здании также сохранила всё своё обаяние. Бывая в Москве, я с нетерпением ожидал приглашения Б.В. в дом и всегда его получал. Каждый раз посещение дома Бориса Владимировича было для меня праздником. Я с удовольствием погружался в просторное кожаное кресло в кабинете, стены которого заставлены стеллажами, наполненными книгами. В кабинете стоял небольшой рояль, на его крышке громоздились в видимом беспорядке книги, рукописи, диссертации, фотографии и т.п. Неторопливая беседа с Б.В. создавала неповторимое блаженство от общения с умным, внимательным и добрым человеком. Обсуждали последние новости научной жизни киевской школы вероятностников, бытовые события, семейные дела, административную ситуацию в Академии наук и Институте математики. Часто я обращался к Б.В. за советом по тому или иному вопросу и всегда получал исчерпывающее, серьёзное мнение моего учителя. Только изредка в беседе я ощущал ностальгию в замечаниях по поводу наших киевских дел. Чувствовалось, что Б.В. всегда считал себя ответственным за судьбы своих украинских учеников.

Затем следовало приглашение супруги в столовую, где за опальным столом собиралась семья. Как правило, у Б.В. я всегда встречал гостей, и не только из москвичей, но из ближнего и дальнего зарубежья, как принято сейчас говорить. Б.В. нарезал на доске тонкие ломтики твёрдого сыра. Наталия Константиновна хлопотала с чаем. Стол всегда был обильным и щедрым. Часто на столе появлялись диковинные продукты, привезенные друзьями и учениками Б.В. из разных стран, из Средней Азии и Кавказа. Трудно было покидать гостеприимный дом. Я всегда

уходил с чувством безграничного восторга. Уходят годы, исчезают из памяти даже самые невероятные события, а вот общение с учителем сохраняется в душе, создаёт состояние удовлетворения и праздничности.

13. Совместное творчество. Как видно из описания, начало моего творческого пути, целиком и полностью определялось влиянием Б.В.Гнеденко. Тем не менее, уже кандидатскую диссертацию я писал под влиянием в основном работ А.Я.Хинчина и И.И.Гихмана и, конечно же, А.Н.Колмогорова, аспирантом которого я был в 1953-1954 гг. Под влиянием Б.В. я занялся проблемами программирования для электронных вычислительных машин (1954-1960 гг.). В результате был написан учебник по программированию совместно с Б.В. и Е.Л.Ющенко, первый в Советском Союзе, переведённый затем на немецкий, французский и венгерский языки.

Докторская диссертация завершалась уже когда Б.В. был в Москве. Впрочем, его настойчивые пожелания не тянуть с оформлением работы немало способствовали сокращению сроков подачи диссертации и защите. Б.В. был оппонентом по моей докторской диссертации. Его устный отзыв заслуживает быть опубликованным, особенно его преамбула и заключение.

"Очень часто возникает вопрос — сколько нужно сделать кандидатских диссертаций, чтобы из них можно было составить докторскую диссертацию? И каждый по своему доброму желанию отвечает: пять диссертаций достаточно, десять; не хватит и пятидесяти диссертаций. Мне кажется, что эта постановка вопроса порочна. Мне думается, что доктор должен обладать некоторыми новыми качествами, не только качеством уметь написать ещё одну кандидатскую диссертацию, или предложить ещё одну тему дипломной работы. От доктора-математика требуется умение найти частные задачи - источник больших проблем. Это первое требование.

Второе требование — из рассмотрения частных задач найти тот метод, который применим и к этим задачам, и позволяет решить множество других задач.

Третье требование — чтобы доктор наук не был замкнутым в круге своих узких интересов, чтобы он умел выходить за пределы своей области, видеть те методы, которые могут быть полезны для круга его задач, и в то же время должен видеть, что математике в целом могут принести его задачи и разработанные им методы, может быть, даже в очень далеких областях математики.

Четвертое требование, не обязательное, но желательное — чтобы доктор-математик умел выходить за пределы собственно математики, чтобы он умел находить большие математические проблемы в смежных областях наук.

И, наконец, пятое требование, абсолютно необходимое для каждого учёного, — чтобы он был увлечён наукой".

"В заключение я хотел бы сказать два слова, уже не моих собственных: вчера на Учёном Совете в Москве я встретился с рядом крупных московских математиков. Они услышали, что я еду на защиту диссертации Владимира Семёновича, и удивились: как, он до сих пор не доктор? А мы были уверены, что он много лет назад уже защитил докторскую диссертацию".

Я безмерно благодарен Б.В. за его влияние на выбор тематики после защиты докторской диссертации.

Два мощных метода анализа, используемых в докторской диссертации, — метод погранслоя и метод факторизации могли быть источником всех последующих задач в асимптотическом анализе граничных функционалов для случайных блужданий. Мне повезло, что я, изучая работы Б.В. по надёжному анализу дублированных систем, нашёл обобщение задачи, которая формулируется в виде задачи о времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний. Я с неизбежностью пришёл к необходимости использовать метод решения проблем сингулярного возмущения для линейных операторов.

К сожалению, вся последующая творческая деятельность происходила уже с моими учениками без непосредственного участия Б.В. Хотя я всегда стремился обсудить с Б.В. новые проблемы, новые результаты и всегда находил внимание и понимание со стороны Б.В.

Последней совместной нашей работой была подготовка доклада на IV Берклеевском симпозиуме в США в 1960 году, в которой участвовал и А.В.Скороход.

Я всегда завидовал И.Н.Коваленко, который активно сотрудничал с Б.В. на протяжении десятилетий. Мне казалось, что наше сотрудничество с Б.В. в области теории надежности с применением математического аппарата теории полумарковских процессов и уравнений марковского восстановления, могло быть более эффективным, и было бы более значимым, если бы Б.В.Гнеденко в 1960-х годах продолжал работать в Институте математики АН Украины. К сожалению, эта возможность была пресечена администрацией Академии.

14. Учитель и ученики. Трудно описать все многообразие взаимоотношений учителя и учеников, прежде всего хотя бы потому, что они носят сугубо индивидуальный характер. Вместе с тем хотелось бы выделить некоторые общие существенные черты, порождающие успех в творческом содружестве учителя и ученика. В самом начале я уже отмечал, как складывались мои отношения с моим Учителем Б.В. Гнеденко. Вначале был восторг и благоговение перед личностью выдающегося ученого, а также абсолютное доверие в его непререкаемый

научный авторитет. Однако впоследствии приходит убеждение, что творчество — это прежде всего самостоятельный интеллектуальный труд, который при благоприятных взаимоотношениях с учителем, подкрепляется доверием учителя. А его внимание и полученные результаты — вдохновляют ученика на дальнейшие творческие поиски.

Главное в анализе научных достижений ученика - это ясная и объективная оценка не только результата, но и пути его достижения.

Только учитель, поставивший задачу и знающий или предвидящий трудности ее решения, может с исчерпывающей убедительностью оценить успех своего ученика.

К сожалению, я не могу похвастаться вниманием моих учителей к моим творческим достижениям, хотя бы потому, что я довольно скоро пришел на "самостоятельные хлеба" самообеспечением постановки проблем. Сразу же после первого научного успеха в поиске явного выражения для симметричной статистики Смирнова, мне пришлось заняться изучением распределения статистики Смирнова с кратным отношением объемов двух выборок.

Убедившись, что здесь трудно ожидать достаточно ощутимых результатов, возникла новая проблема: - где искать хорошую постановку задачи. И здесь на помощь мне пришли работы моих учителей И.И.Гихмана и А.Я.Хинчина, в которых рассматривались проблемы асимптотического разложения и обоснования асимптотики методом верхних и нижних функций. Роль учителей, как видим, была чисто номинальной, заочной. А реакция моих учителей Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова была вначале восторженной, о чем свидетельствует защита кандидатской диссертации, которую оппонировали И.И.Гихман и А.Н.Колмогоров. Лишь с появлением работы Чжан Ли-Цяня появились сомнения в корректности предложенного мною асимптотического анализа распределений статистики Колмогорова и Смирнова. И снова я был предоставлен самому себе перед возникшей проблемой: построения функций типа погранслоя.

Я с благодарностью вспоминаю полученное мною письмо от А.Н.Колмогорова с предложением написать обзорную статью для журнала ТВиП по асимптотическому анализу распределений максимальных отклонений в бернуллиевой схеме случайных блужданий.

Это письмо повергло меня в состояние исключительного творческого подъема. Громоздкая статья была подготовлена к печати за несколько месяцев напряженной работы. Я снова поверил в свои творческие силы и вернулся к научной тематике по теории вероятностей, забросив программирование, логику и теорию алгоритмов. Здесь уместно будет сообщить, что упомянутое выше письмо, действительно подписанное А.Н.Колмогоровым, было инициировано моими ближайшими друзьями Ритой Диесперовой и Володией Золоторевым. Они

сочинили письмо, а Володя Золотарев подписал его у А.Н.Колмогорова. Спасибо им!

Моими учителями были также Марк Иосифович Вишик и Марк Григорьевич Крейн, по их работам я научился строить погранслои в асимптотическом анализе функций распределения, а впоследствии — и функционалов. Они же были и рецензентами моих результатов. М.И.Вишик был моим оппонентом по докторской диссертации, это было совсем нетривиально организовать. Понимая, что только Марк Иосифович Вишик и Лазарь Аронович Люстерник могут по достоинству оценить мой вклад в асимптотический анализ сингулярных задач, я добился согласия М.И.Вишика выступить у него на семинаре в Москве. Вспоминаю, как в переполненной аудитории Марк Иосифович обращаясь ко мне, заявил: "Мы все прекрасно понимаем, что докторская диссертация содержит весьма глубокие результаты. Не могли бы вы нам на самом простом примере объяснить, как они получаются?" В своем выступлении я избрал простейшую схему случайных блужданий на отрезке с двумя поглощающими экранами. Понимая, что, упрощая до предела рассматриваемые мною задачи, я рискую услышать: "Да это же тривиально! А где же докторский уровень?" Погранслои в граничных задачах для случайных блужданий, в отличие от работ Вишика и Люстерника, определяется решениями интегральных уравнений типа свертки на полуоси, ядра которых строятся при помощи факторизации символа исходного оператора, определяющего случайное блуждание. Оригинальность подхода произвела на М.И.Вишика благоприятное впечатление и он по-отечески похвалил меня и дал согласие быть оппонентом по докторской диссертации¹. Более того, он замолвил за меня словечко Люстернику, который написал отзыв на мою диссертацию, состоящий, практически, из единственной фразы, но зато с подписью выдающегося специалиста по вычислительной математике Л.А.Люстерника.

Наиболее сложные взаимоотношения у меня были с моим, безусловно, учителем И.И.Гихманом. Он впервые познакомил меня с теорией вероятностей на лекциях обязательного курса в Университете, он был дважды моим оппонентом и по кандидатской и по докторской диссертации, у него я впервые обнаружил универсальную схему построения асимптотических разложений в задачах с малым параметром ε , основанной на разложении исходного оператора, зависящего от параметра серии ε , по степеням ε , с использованием формулы Тейлора. Вместе с тем, я никогда не мог отделаться от ощущения, что И.И.Гихман скептически относится к моим творческим результатам. Скепсис к кандидатской диссертации выразился, правда, только в сомнении в правильности

¹ О том, как М.И.Вишик выполнил свое обещание, смотри раздел "Защита докторской диссертации".

названия работы, что гут же опротестовал А.Н.Колмогоров. А при защите докторской диссертации И.И.Гихман снисходительно согласился с тем, что метод асимптотического анализа в моей работе действительно оригинален.

Только мне известен факт, как скептицизм И.И.Гихмана повлиял на усовершенствование метода последовательного исчерпывания невязок.

Даже сам И.И.Гихман об этом не подозревал. Однажды, в 1961 г. на конференции в Ужгороде, я выступал с докладом. Присутствующий И.И.Гихман усомнился в корректности выбора граничных условий для погранслоев в виде суммы слагаемых формулы Тейлора для регулярных членов асимптотики. Я не сумел убедительно объяснить происхождение предложенных формул. Это повергло меня в отчаяние. Быть может, И.И.Гихман имеет резон, и граничные условия должны определяться как-то по-другому? Размышляя об этом на берегу реки Уж, я сообразил, что мои формулы предполагают непрерывно дифференцируемое продолжение регулярных членов за пределы их области определения решениями дифференциальных уравнений. А без такого продолжения нельзя пользоваться формулой Тейлора при разложении исходного оператора по малому параметру. Вот так!

Нужно было сказать ключевые слова: "Регулярные члены асимптотики продолжаются непрерывно дифференцируемым образом".

В дальнейшем всегда я этот факт формулирую достаточно четко. Математические преобразования не всегда достаточно глубоко контролируются сознанием, да и нужные доводы часто возникают почти на интуитивном уровне. Возможность неосознанного успешного преобразования без должного обоснования — удивительная творческая способность человеческого мозга.

Недоверие учителя к результатам ученика служит важнейшим стимулом к предельной ясности изложения научной работы.

Вспоминаю знаменитое изречение Станиславского: "Не верю!". В анализе научной математической работы этот призыв всегда должен звучать для рецензента руководящим лозунгом. Конечно, учитель должен быть достаточно терпимым, чтобы не разочаровать ученика излишней придирчивостью. Отметив несуразность, надо постараться вместе с учеником найти выход из тупика, или хотя бы посочувствовать неудаче. Априори резкое порицание, когда ученик еще не достаточно уверен в себе, подавляет инициативу, приводит в состояние отчаяния, неверия в собственные силы, способно отторгнуть ученика от творчества.

Особо следует отметить влияние учителя на творчество ученика, основанное на поклонении ученика к творчеству учителя. Такие взаимоотношения часто порождают удивительные успехи в творчестве ученика, которые невозможно объяснить лишь априорными способностями ученика. И в самом начале своего творческого пути, когда

я искал точные формулы для распределения статистики Смирнова, и в дальнейшей, уже в самостоятельной творческой деятельности, когда я сформулировал задачу надежности стохастической системы как задачу о распределении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве (работоспособных) состояний, — всегда ориентиром для меня была научная деятельность моего Учителя. Размышляя над его результатом о поведении распределения безотказной работы дублированной системы, я понял, что усложнение системы в абстрактной форме как полумарковского процесса в дискретном множестве состояний, является вполне логичным. А значит, проблема безотказной работы системы сводится к анализу времени пребывания в подмножестве состояний.

Смею думать, что и мои ученики в своем творчестве также пребывают, сознательно или интуитивно, под влиянием моего научного авторитета. Это значит, что не только моя инициатива в постановке проблемы, но и сама тематика моего творчества всегда была под пристальным вниманием моих учеников. Об этом свидетельствует не только научные результаты моих аспирантов, что вполне естественно, но и тематика работ многих молодых представителей украинской школы вероятностников, которые, хотя и не были моими аспирантами, но активно принимали активное участие в развитии, например, теории полумарковских процессов, алгоритмов фазового укрупнения, а также асимптотического анализа случайных эволюций в схеме усреднения и диффузионной аппроксимации. Мне приятно вспомнить, что замечательный математик В.Шуренков увлекся построением резольвенты и потенциала для случайных блужданий на полуоси и на интервале. Так что фактически у нас с ним есть совместный ученик — В.Супрун.

Разумеется, огромное значение имеет неформальное общение учителя с учеником. Все зависит от личности учителя, внешности, интеллигентности и образованности, его доступности в повседневной жизни. Б.В.Гнеденко был, по-моему, уникальным учителем, с которым всегда было легко общаться. Я всегда с замиранием сердца входил в его дом, его кабинет, участвовал в трапезах, будничных и праздничных. Мне легко было думать в присутствии Б.В. на различные темы, я с увлечением мог говорить о волнующих меня математических проблемах. Удивительно терпеливо Б.В. выслушивал и точно реагировал и на очередную сплетню из жизни Института Математики в Киеве, и на сообщение об алгоритме укрупнения полумарковского процесса. Б.В. предложил назвать "алгоритм фазового укрупнения", что абсолютно отражало суть дела. И все-таки я всегда ощущал некую преграду между нами, которую мне не дано переступить, чтобы стать другом своего учителя, как это было во взаимоотношениях Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова.

Мои размышления о взаимоотношениях учителя и учеников будет неполным без характеристики моих ближайших учеников - докторов наук. Трое из них все еще работают в И.М. (Д.Гусак, Н.Братийчук, А.Турбин).

Д.Гусаку повезло, он появился в аспирантуре И.М., как раз, когда я завершал работу над своей докторской диссертацией. Вполне естественно, что я выделили ему грядку в своем огороде: граничные задачи для сложного пуассоновского процесса. В моей диссертации эта тема лишь обозначена в краткой главе 5. Все инструменты анализа были уже подготовлены: и метод исчерпывания невязок и факторизация символа оператора, задающего марковский пуассоновский процесс с независимым приращением. Так что кандидатская диссертация Д.Гусаку была гарантирована- Сразу же после защиты докторской диссертации я сменил тематику, организовал семинар по полумарковским процессам, предполагая возможные приложения в теории систем обслуживания и теории надежности. Помню формальный доклад Г.Марьяновича с перечислением отдельных фактов, без малейшей попытки анализа сути полумарковских моделей систем. А мне интуиция подсказывала, что ПМП и есть наиболее подходящая математическая модель стохастических систем с "дискретным вмешательством случая". Дима Гусак увяз в граничных задачах для случайных блужданий, усовершенствуя метод факторизации и расширяя классы процессов с независимыми приращениями и типы граничных функционалов. Оказалось, что этой проблематики ему хватило "на всю оставшуюся жизнь". Удачный выбор темы докторской диссертации обеспечил ему успешную защиту в 1980 г. Мне нравится его выдержка, его дотошность в аналитических преобразованиях. Но как скучно рассказывает он свои результаты! Как будто в них нет ничего, кроме аналитических преобразований. Бесконечные сочетания факторизационных тождеств, от которых "рябит в очках", не вызывают у меня восторга. Но зато Д.Гусак всегда "при деле". Очень надёжен он в общественных делах. Многие лета он был ученым секретарем Совета по защите диссертаций. Мне всегда было спокойно за все формальности в делах, если ими занимался Д.Гусак.

Николай Братийчук появился, когда для сложного пуассоновского процесса были построены потенциал и резольвента на полуоси. Однажды, Валентин Шуренков, решив заняться проблемой построения потенциала и резольвенты на полуоси для более общих процессов с независимыми приращениями, спросил меня: "Как Вам удалось найти потенциал для сложного пуассоновского процесса?" Не просто ответить на такой вопрос. Тем более, В.Феллер считал, что решения интегро-дифференциального уравнения на полуоси в случае отрицательного сноса вообще не существует, имея в виду - ограниченного решения. А потенциал задается в этой ситуации неограниченным на полуоси решением. Думаю, что меня все-таки заворожила оценка В.Феллера чисто аналитического подхода в

прикладных задачах для случайных блужданий на полуоси. Кроме того, мои поиски потенциала стимулировались предложением крупнейшего физиолога П.Костюка, - создать математическую модель электрической активности нейрона. Для такой модели сложный пуассоновский процесс с положительными скачками и отрицательным сносом представляется вполне естественным. Но тогда возникает задача определения распределения времени первого достижения заданного положительного уровня (момент излучения нейроном импульса) с отражением (точнее, процессом с задержкой) на нулевом уровне (разряженное состояние нейрона). Приверженец аналитического подхода — построения и анализа уравнения для искомого распределения, я без особого труда построил такое уравнение. А вот, как построить решение граничной задачи на отрезке с одним отражающим и другим поглощающим экраном? Вместе со своей аспиранткой Э.Ткаченко я пытался применить метод асимптотического анализа, что привело к успеху при неотрицательном сносе. Случай отрицательного сноса не поддается такому анализу, что и до сих пор для меня остается загадкой. Исчезла моя аспирантка (уехала в Москву с молодым человеком), охладел к математической модели нейрона П.Костюк, а меня все занимала эта задача...

Н.Братийчук принял активное участие в развитии "метода потенциала" для произвольных процессов с независимыми приращениями и добился значительных успехов в приложениях метода в задачах анализа систем обслуживания. Обладая аналитическим искусством, Н.Братийчук уверенно преодолевал сложные аналитические преобразования, возникающие при решении интегро-дифференциальных уравнений методом факторизации. Он существенно помогал мне в работе с аспирантами из Туркмении. Удивительная работоспособность Николая проявилась и при подготовке докторской диссертации, которую он защитил в 1990 году.

15. Традиции школы. Влияние Учителя на творчество его учеников не ограничивается лишь участием Учителя в творческом процессе. Существенна роль Учителя в создании традиций существования школы. Среди четырёх поколений учеников Б.В. перебивали разные математики и инженеры, с разными характерами и привычками, интересами и запросами. Однако в сфере функционирования созданной Б.В.Гнеденко украинской школы по теории вероятностей и разнообразных ее применений поведение в коллективе регламентировалось традициями, установленными Учителем. Прежде всего, безграничная преданность науке, добросовестность, неустанная жажда познания. В общественных отношениях — доброжелательность, откровенность в критике и похвале, объективность и достоверность. В житейских отношениях — дружеское расположение, готовность откликнуться на призыв о помощи, товарищеское взаимодействие, не взирая на ранги и почести.

Красной нитью в жизни школы проходит внимание к новым талантливым ученикам, воспитание их в лучших традициях школы.

Вот почему коллектив украинских вероятностников, впитывая современные проблемы и методы их решения, так устойчив в научном процессе и так богат молодыми талантами. Можно быть уверенным в стабильном существовании школы Б.В.Гнеденко и в настоящем, и в будущем.

Спасибо Учителю!

ТВОРЧЕСКИЙ ПУТЬ

Б.В. Гнеденко в Киеве

Впервые Борис Владимирович появился в Киевском Университете, на заседании Учёного совета механико-математического факультета, в декабре 1949 г. Слух об этом дошёл до нас, студентов 5-го курса, и мы пошли на заседание Совета, чтобы увидеть и услышать молодого академика. Его реплики и краткое, яркое выступление сразу привлекли наше внимание и симпатию. Уже на следующий день мы искали список объявленных Борисом Владимировичем тем дипломных работ для студентов 5-го курса. Темы дипломных работ были непосредственно связаны с тематикой уже подготовленной к печати знаменитой монографии "Предельные распределения для суммы независимых случайных величин" написанной Борисом Владимировичем совместно с его выдающимся учителем и другом А.Н.Колмогоровым.

Не имея достаточно серьёзного образования по теории вероятностей (к тому времени мы прослушали только единственный обязательный курс "Теория вероятностей", 32 лекционных часа, прочитанных И.И.Гихманом), я выбрал тему дипломной работы на слух. "Области притяжения устойчивых процессов" звучали как нечто топологическое, к чему мы были приучены спецкурсами и семинарами М.А.Красносельского и К.Г.Крейна, С.И.Зуховицкого и Г.Каца. Борис Владимирович выслушал моё пожелание, объяснил проблему и предложил искать пути решения в новой монографии, гранки которой он и дал мне для изучения.

С огромным энтузиазмом я принялся за поиски доказательства условий принадлежности к тому либо иному устойчивому закону, внимательно изучая монографию. Мне повезло, поскольку проблема носила сугубо аналитический характер и не требовала привлечения к своему решению вероятностной интуиции, без которой, на мой взгляд, невозможно быть специалистом в области теории вероятностей и математической статистики.

Для доказательства предельных соотношений, которыми задаются условия притяжения к устойчивому закону, надо было воспользоваться

техникой области интегрирования на интервале так, чтобы можно было воспользоваться свойством асимптотической регулярности исходного распределения. Такая техника была разработана в монографии. Так что мне пришлось только, повозиться, приспособив её к данной проблеме. Несколько бессонных ночей, грома исписанной бумаги, и успех был достигнут. Воодушевлённый результатом, я пришел к Борису Владимировичу, чтобы показать свои расчёты. Мне показалось, что Борис Владимирович был не очень удивлён сравнительно быстрым решением проблемы (1-2 недели). По-видимому, он знал заранее, как она решается. Так что предложенная тема дипломной работы была, по существу, тестом на зрелость. Убедившись в корректности моего изложения, Борис Владимирович предложил существенно изменить тему: вместо условий притяжения к устойчивым законам в терминах функций распределения рассмотреть условия притяжения к устойчивым законам, но уже в терминах характеристических функций. Это был подарок. Борис Владимирович заранее знал результат, так что мне не пришлось долго блуждать в поисках условий теорем.

А доказательство было существенно проще, чем для функций распределения. Ведь я уже знал, как должны задаваться нормирующие константы. Так появилась наша первая совместная с Борисом Владимировичем статья в журнале "Доповіді Академії наук Української РСР" (III — 1, 1950).

Начало самостоятельных исследований

Выдающаяся монография Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова содержала завершающие исследования в области предельных теорем для суммы независимых случайных величин. Однако, как это всегда бывает в науке, развитие в монографии методы и полученные благодаря им результаты открывали новые перспективы развития для исследований завершённой в основном, области. Разнообразие задач невозможно перечислить. Достаточно взглянуть на список последующих монографий, посвящённых этой центральной проблеме теории вероятностей на протяжении всего периода становления и развития как строгой математической дисциплины.

Конечно же, Б.В. понимал, что имеется множество нерешённых проблем и задач, связанных с тематикой монографии. Одну из таких задач, непосредственно вытекающую из свойств устойчивых законов, Борис Владимирович и предложил мне для самостоятельного анализа. Известно, что класс устойчивых законов характеризуется устойчивостью относительно операции свёртки.

Спрашивается, обладает ли область притяжения устойчивого закона таким же свойством? На первый взгляд, это должно быть так, и это была гипотеза Гнеденко. Но оказалось, что эта гипотеза не верна. Здесь мы

имеем дело с необычной постановкой задачи. Одно дело доказывать уже сформулированный факт, и совершенно иначе обстоит дело с его опровержением. Надо строить контрпример! Если гипотеза поверхностна, то и контрпример лежит, так сказать, на поверхности. Если же гипотеза основана на достаточно глубоких соображениях, то построение контрпримера становится весьма сложной проблемой.

Анализ гипотезы Бориса Владимировича был для меня началом самостоятельной творческой работы. Я должен был сначала преодолеть заволащивающее воздействие Бориса Владимировича как автора гипотезы, и потом начать поиск контрпримера. К счастью, весь необходимый инструмент для построения такого приёма уже был создан в монографии. Мне надо было построить из кусочков два безгранично делимые распределения вероятностей таким образом, чтобы их свёртка принадлежала области притяжения устойчивого закона, а каждый из них в отдельности — нет. Эту работу я проделал с таким же энтузиазмом, как и первую, можно сказать, на одном дыхании.

Так появилась моя первая самостоятельная статья в журнале "Доповіді Академії наук Української РСР" (III — 4, 1951). Когда я принёс контрпример, Борис Владимирович понял, что из меня может получиться творческий математик, и предложил мне поступить к нему в аспирантуру.

Это было для меня потрясающим событием.

Неожиданный провал

Будучи студентом-заочником Харьковского университета и одновременно, лейтенантом, заведующим лабораторией проводных средств связи в ХВАУС (Харьковское Военное Авиационное училище связи), в 1946 г. я сдавал экзамен по анализу за 2-ой курс профессору Харьковского университета.

Дорога из училища, находящегося на окраине Харькова (пос. Павловский) до Института математики (в центре города) была длинной; я чувствовал себя крайне неуверенно, готовясь по ночам к экзамену (с 6.00 и до 20.00 я должен был находиться на службе), и вдохновлялся мечтой: вот отслужу и пойду учиться на стационар в Киевский университет, и когда буду защищать дипломную работу, встанет седовласый академик, восхищённый моими результатами, и пригласит меня в аспирантуру. С этими радостными мыслями я открыл дверь Института математики. Увы, экзамена я не выдержал и должен был готовиться к следующей попытке. Совсем по-другому выглядел обратный путь домой. Подавленный, потерявший веру в свои математические способности, а вместе с ней — и смысл дальнейшей учёбы в университете, я убегал как можно дальше от Института математики с израненным сердцем, и бежал не домой, а к другу, преподавателю нашего училища Ли (без офицерского звания, потому что он был кореец). За столом вся его

семья занималась приготовлением самодельных спичек на продажу. Мы обсудили моё положение. Ли легко убедил меня, что неудачи не могут быть препятствием для достижения благородной цели. Впереди у меня будет множество таких, и не только таких, а и посложнее препятствий. Они должны меня закалять. Главное — работать надо упорно, настойчиво, самозабвенно! Успокоенный я вернулся домой.

И вот теперь, спустя четыре года, моя мечта сбывается. И я это заслужил собственным трудом. Конечно, это было потрясающей радостью для меня. И в то же время уроком. Мечта окрыляет, мечта защищает, мечта вдохновляет.

Кстати, профессор Харьковского Университета, поставивший мне двойку по анализу за второй курс (справедливо), спустя много лет обратился ко мне, тогда уже академику, с просьбой поддержать издание его книги по теории вероятностей в качестве учебника. Он был хорошим аналитиком, но не обладал вероятностной интуицией, что, конечно же, сказалось на содержании учебника. Впрочем, хорошее изложение аналитических проблем теории вероятностей никогда не бывает во вред. Более того, я всегда полагал и полагаю, что надо по возможности обращать внимание студентов на то, где кончается вероятностная процедура анализа, а где начинается сугубо аналитическая процедура. Конечно, я поддержал издание учебника, не выдавая себя за неудачника студента-заочника.

Направление на работу

Вернемся к предложению Бориса Владимировича Гнеденко. Мечта сбылась, однако в аспирантуру, как оказалось, ещё надо было поступить! Но об этом позже. А тогда, весной 1950 г., к Борису Владимировичу приехал его удивительный учитель и друг А.Н. Колмогоров со своим любимым учеником Юрой Прохоровым (ему тогда было 19 лет!). Я помню, что на летучем семинаре в университете, которые так любил (и умел) устраивать А.Н. Колмогоров, я рассказывал ему контрпример к гипотезе Бориса Владимировича, рисуя на доске график кусочно-постоянных функций распределения. По-видимому, ко мне как к математику уже тогда А.Н. Колмогоров проникся расположением и доверием.

Получив мое согласие, Борис Владимирович отправил в учебную часть университета заявку на место аспиранта для Королюка В.С. Отказ последовал незамедлительно. Мои автобиографические данные абсолютно не соответствовали условиям приёма в аспирантуру: мой отец в 1944 г., сразу после освобождения Киева, был арестован и осуждён на 15 лет "за пособничество немецким оккупантам", с чем и отправился в "места не столь отдаленные" — в Джезказган (Средняя Азия) на медные рудники. Вскоре, в 1949 г. он умер там от туберкулёза. "Вина" его была очевидной:

во время оккупации Киева он работал по своей специальности, агрономом в сельскохозяйственной организации под Киевом, что давало ему возможность выжить вместе с семьей - моими сестрой, матерью и бабушкой. Спустя много лет, в уже обновляющейся независимой Украине, прокуратура КГБ под новой вывеской, но с тем же содержанием, подтвердила справедливость приговора, вынесенного в 1951 г. (спустя два года после смерти обвиняемого). На дополнительный запрос в связи с несоответствием элементарной правовой логике был дан "исчерпывающий" ответ: "Предыдущая информация была неверной. Человек, допустивший ошибку, наказан". Но было ли это только просто ошибкой?...

Я не особенно удивился, когда узнал, что отказ Бориса Владимировича не остановил. Он написал гарантийное письмо, беря всю ответственность за моё будущее гражданское поведение на себя. Но и это не помогло! Попытка получить свободный диплом в связи с тем, что он с отличием, также не дала положительного результата. Ректор университета категорически протестовал против каких бы то ни было поблажек для меня. Я был распределен на работу преподавателем математики в техникум связи города Акмолинска, недалеко от Джезказгана. "Туда же и тебе дорога, Владимир" — думал я, но не смирился. Я написал письмо в ЦК КПСС господину Маленкову (в то время он был вторым лицом в государстве). Аргументами были два обстоятельства. Во-первых, я не был на оккупированной территории, а служил в рядах Советской Армии во время войны, причём добровольно, так как начал военную службу в 17 лет, тогда как обычный призыв начинается с 18. Во-вторых, мои математические способности, подтверждаемые выдающимся учёным Борисом Владимировичем Гнеденко, должны развиваться в научной среде.

И здесь произошёл казус. Письмо с резолюцией канцелярии Маленкова переслали в ЦК КП Украины для принятия решения. Чиновник, получивший, задание разобраться в ситуации, решил отговорить меня поступать в аспирантуру, аргументируя тем, что творить можно и без поддержки государства, о чём свидетельствуют факты из истории. Кроме того, в моей зачётной университетской книжке он обнаружил много "посредственных" оценок в форме "зачёт". Тут мне окончательно стало ясно, с кем я имею дело. Работавший в отделе науки ЦК партии бонза не имел представления, что означает слово "зачёт"... Воистину прав был острослов воскликнувший: "Какая высокая должность - олух царя небесного!" Ми разошлись, как говорится, каждый при своём интересе. Да, но мне предстоял путь в Акмолинск! И тут произошло чудо. По-видимому, моя уверенность все-таки обеспокоила чиновника (как известно, у партийных боссов был невероятно развит инстинкт самосохранения), и он решил: "Чем чёрт не шутит" - а вдруг у настырного парня есть "волосатая лапа" в Москве? Ведь не выбросили же письмо на

помойку, отправили разобраться! Здесь мне остаётся только гадать... А события приняли новый для меня оборот. Меня пригласили в комиссию по распределению, стали ахать и охать. Как же так, единственный сын у матери, лежавшей в больнице с туберкулёзом, да ещё участник войны, должен будет отправиться в "места не столь отдалённые". Мне предложили новое направление — в Киевский областной отдел народного образования. Значит, учителем в школе Киевской области. Это победа! Но какая? Не так часто можно встретить учёного, стартовавшего в своей деятельности учителем школы. Да ещё, если учесть положение молодого специалиста, который обязан отработать по направлению по крайней мере три года. Прощай, аспирантура!

Преподаватель учительского института

Я решаюсь на следующий шаг. Еду в больницу к матери, рассказываю ситуацию: у меня, можно сказать, в кармане направление на работу в школу Киевской области. Значит, недалеко от дома. Однако, лёд тронулся, и у меня есть шанс изменить направление, просить направить меня в учительский или педагогический институт преподавателем. Тогда, конечно, нельзя ожидать места в Киеве или поблизости. Мать даёт мне свое благословение, и я прошу заместителя декана поддержать моё желание работать преподавателем в вузе. Замечательный человек И. Ильин идёт со мной в Министерство образования к министру на приём. Поговорили... Прихожу за решением — отказ. Иду снова на приём сам. Ещё поговорили... Жду решения... Отказ. Тогда я решаюсь на последний шаг. Иду третий раз на приём к министру. Но меня уже не принимают. Я терпеливо жду в приёмной. Когда министр выходит на обеденный перерыв, я заступаю ему дорогу и говорю, говорю, говорю... Дело в том, что это была уже наша третья встреча (!) в течение 10 лет! Первая встреча была в Киевском университете в 1941 в конце июня, спустя неделю после начала войны Германии против Советского союза. Я пришёл сдавать документы на физико-математический факультет в Киевский университет, имея аттестат с отличием об окончании средней школы, но без паспорта, поскольку, мне тогда ещё не исполнилось 16 лет. А документов в университет без паспорта не принимали. Я попросил ректора А.Н.Русько сделать для меня исключение. Он отказался, советуя обратиться в Министерство образования. Шаг за шагом я добрался до заместителя министра и убедил его, что справлюсь с трудностями учёбы в таком раннем возрасте. С рекомендацией заместителя министра меня зачислили в Киевский университет на 1-й курс физико-математического факультета. Но учиться мне не пришлось. Университет эвакуировался в Харьков, а я по призыву военкомата в июле отправился на восток, в Донбасс на трудовой фронт, сначала пешком, а затем поездом в г. Сталино (теперь Донецк). Вторая встреча была в Харькове, в начале сентября 1941 г., когда

я просил удостоверить моё поступление в Киевский университет, и получил его без колебаний прямо на лестничной площадке без всяких формальностей.

Я снова поступил, теперь уже в горно-индустриальный институт на горный факультет (самая высокая стипендия!). Правда, документов у меня не было, имелась справка о том, что мои документы приняты в Киевском университете. Никакой печати — только подпись члена комиссии. Добрался я из Донецка в Харьков на перекладных, встретил ректора на лестничной площадке и попросил поставить печать на справке. Он, не задумываясь, положил справку на перила и придавил печатью. Теперь я напомнил ему, что я был у него на приёме в Киеве, что у меня аттестат зрелости с отличием, а это важно для стипендии, И снова, почти не колеблясь, ректор написал: "Диплом с отличием" и поставил ещё одну печать.

Теперь, после войны, зам. министру образования А.М.Русько я говорю: "Вы поверили мне на слово во время войны. Поверьте же мне и сейчас. Я буду хорошим преподавателем". На следующий день я получил направление в Артёмовский учительский институт на должность старшего преподавателя. Теперь давайте посчитаем: Акмолинск, Киевское облоно, два не состоявшиеся направления в пединститут, и, наконец, пятым заходом — Артёмовск. Это победа. Я — преподаватель ВУЗ'а, а значит, имею право поступать в аспирантуру.

Вся эпопея изменения направления на работу длилась почти всё лето. Так что во второй половине августа, получив направление, я отправился в Артёмовск. Снова Донбасс, где в 1941 г. я начал свою трудовую деятельность бутчиком (передвижник породы в забое) на шахте 31-бис Ясиноватая после одной недели учёбы в горно-индустриальном институте, где успел только придумать свою подпись для паспорта. Получив паспорт, мы втроём, мальчишки одного двора, отправились в эвакуацию на свой страх и риск в Ташкент — "город хлебный".

Окончание школы

14 июня 1941 у меня был последний выпускной экзамен. Сразу после экзамена, радостные и возбуждённые, мы помчались на Днепр, - купаться, кататься на гребных лодках, взятых напрокат. Ничто не омрачало радости окончания школы, открывавшейся перспективы. Для меня проблемы выбора пути не было. Я решил, что стану математиком. "Ты будешь прекрасным инженером", — говорил мне отец. Он исходил из своего жизненного опыта, я же был увлечён своими школьными успехами. Я жил в окружавшем меня мире беспечно, радостно встречая каждый день. Отец, сорванный с места "революционным вихрем" и гражданской войной, скитался по необъятным просторам России. Родившись в деревне под Брестом, он завершил своё первое высшее образование —

учительский институт — в Уфе, на Урале. А затем судьба привела его в Киев, он стал завучем детского дома. Женился, в семье появились дочь и сын. Заботы о семье заставили его, уже семейного человека, решиться на продолжение своего образования, которое дало бы ему более надёжное материальное положение. И он выбрал сельскохозяйственный институт, стал заочником, продолжая работать завучем детдома. Отец оказался провидцем. В начале 1930-х гг. в Украине — богатейшей чернозёмной стране разразился спровоцированный И. Сталиным голодомор. К тому времени, уже став агрономом, отец мотался по окрестным сёлам, организовывая работу знаменитой впоследствии Мироновской сельскохозяйственной селекционной станции. Чтобы облегчить положение семьи, он перевёз нас — детей с бабушкой в Мироновку, где у него была половина сельского дома, а мать осталась в Киеве стеречь квартиру. А потом настали годы сталинских репрессий, отца вызывали на допросы в НКВД, после чего он с тревогой ждал дома "ночных гостей", незваных-непрошенных. Отец чётко знал, что страной правили большевики, захватившие власть в результате ночного Октябрьского переворота в 1917 г. Они и в дальнейшем вершили свои чёрные дела под покровом тьмы — массовые расстрелы "классовых врагов" в подвалах ВУК, массовые аресты по ночам в 1930-х гг. В этом не было ничего удивительного — ведь они действовали по указке патологического убийцы И. Сталина в угоду своему высшему владыке — князю тьмы, то есть сатане. Тогда, к счастью, для отца всё обошлось. Какое громкое дело "пришьёшь" агроному? Увы, дальнейшие события после военных лет показали, что и агроном может стать "врагом народа"... А в 1941 г. отец хотел видеть меня инженером-электротехником, полагая, что такая специальность не привлечёт ко мне пристального интереса "доблестных чекистов". Мы же — пионерское поколение Страны Советов — считали нашу Родину оплотом стабильности. Отец лишь посмеивался над нашей наивностью, никогда не пытаясь посеять сомнения в наших чистых и светлых душах. И был прав. Не надо торопиться взрослеть. Детство и юность — быстротечны. И если родничок детства не замутиён, не засорён пороками окружающего мира, тогда на всю жизнь сохраняется возможность, склониться к этому родничку и впитать живительную влагу, ощутить в себе надёжную опору в борьбе с невзгодами, тоской и неуверенностью.

Так мы с отцом и не договорились окончательно, куда мне поступать после школы: в университет на математический факультет или в политехнический институт на инженерный факультет по электротехнике. В тот день, когда я сдавал последний экзамен в школе, мой отец уехал к своему отцу, моему деду, в деревню под Брестом. Я с ним даже не успел попрощаться.

Война

Мы проснулись на заре 22 июня 1941 г. под грохот зенитных орудий, с удивлением вышли на балкон и ещё более удивились, увидев разрывы зенитных снарядов над Подолом, а вдалеке, за холмом, поднималась чёрная туча дыма — горели склады горючего на аэродроме в Жулянах. Нет, это не могло быть манёврами. Это — война!... Мы ждали сообщений по радио. Наконец, в 12 часов дня выступил Молотов и заявил: "Враг будет разбит! Победа будет за нами!". Эти слова, как молитву, мы пронесли через всю войну. Мы верили в победу настолько, что я, повесив карту Европы на стену в своей комнате, заготовил красные флажки отмечать победоносное шествие Красной Армии. Война будет на территории врага — в этом мы были абсолютно убеждены. С моим другом по школе Петей мы пошли в военкомат с просьбой послать нас защищать нашу Родину. Там посмеялись над нами, сказали: "Повремените, дойдёт очередь и до вас".

Спустя неделю после начала войны я пришел сдавать документы в Киевский университет на физико-математический факультет, имея аттестат с отличием об окончании средней школы, но без паспорта. Отца не было. В день начала войны, когда он должен был вернуться из поездки в родную деревню, поезд из Бреста пришёл разбитый вдребезги. Что думали мать и бабушка я могу только догадываться. Я же был уверен: отец найдет другой выход из сложившейся ситуации. Так оно и было.

Поступление в университет без паспорта описано на предыдущих страницах. Здесь я хочу только заметить, что начало войны не оглушило нас непоправимыми последствиями. Юношеский оптимизм не допускал мысли, что всё круто изменилось. И, конечно же, отрезвление не заставило себя долго ждать. Через две недели после начала войны военкоматы призвали допризывников, окончивших школу, для вывоза их из Киева. Немецкая армия неумолимо двигалась на восток. 8 июля, собрав нехитрый рюкзачок, в котором лежал добрый кус сала (школа отца), мы отправились в военкомат. В кармане пиджака была сберкнижка на полторы тысячи рублей, которые отец, всегда и непременно ожидая катаклизма в обществе предусмотрительно положил каждому из нас (мне и сестре). Эта сберкнижка и спасла меня от голода и истощения в эвакуации.

Бодро и весело мы шагали на восток под началом офицеров военкомата, по направлению на Борисполь. Первая остановка на ночлег в сельской школе. Мы ещё не успели разместиться, дурачась и меняя места ночлега, как ворота школы уже облепили хозяйки окружающих домов. Они просили начальство отпустить нас к ним отобедать. Разбившись на группки по 5-6 человек, мы отправились по хатам. По дороге нам захотелось пить, и я попросил старика, сидящего на лавочке перед калиткой, с ведром, наполовину наполненным водой. Старик молча встал,

вылил воду из ведра и скрылся за калиткой. Мы недоуменно замерли. Что бы это могло значить? Ждать ответа нам долго не пришлось. Старик появился на улице с полным ведром. Для будущих защитников отчизны он не поленился набрать в колодце свежей воды. А вернее всего, это была его естественная реакция гостеприимства, реакция сельского жителя Украины.

В хате, куда нас привела дородная молодница, был накрыт стол. Читайте Гоголя и узнаете, что было на столе: картошка, варёная в печи, сметана в полумиске, вареники с творогом, сыр отдельно горкой на блюде, мясное жаркое пахло из устья горячей печи. Ну и наелись мы! А запивали молоком, кто сырым, кто топлёным. Пешее путешествие наше закончилось на второй день. Нас посадили в теплушки и поездом отвезли в Донбасс, распределили по шахтам. Мне досталась шахта "Рутченковка 34-бис". Вместе со мной были мой школьный друг Петя и двое друзей из моего двора — Миша и Гриша.

Шахта

Незабываемо первое впечатление работы в забое шахты. Мне вручили широкую лопату — такими дворники убирают снег — и отправили в забой вместе с опытным бутчиком - подборщиком породы (так называлась моя шахтерская профессия). В забое не то что стоять, но и сидеть было практически невозможно. Передвигались полулёжа, и в таком же положении надо было работать. Для добычи угля применялся довольно примитивный и простой метод. Взрывался заряд, обрушивался свод забоя. Создавалась просторная "комната", из которой надо было, прежде всего, удалить породу, чем и занимались бутчики, перемещая лопатами породу из одного места, где должны добывать уголь, в другое, где добыча угля уже была завершена. Кстати, из породы строились также опоры в забое, а дорогие деревянные или металлические опоры перемещали в забой, где добывался уголь. Меня поразило, что порода была во много раз тяжелее угля, так что очень легко можно было "на вес" определить, где уголь, а где порода. Но лопата была для снега. Конечно, поднять её с породой было невозможно. Надо было только тащить её по дну забоя волоком, полулёжа. А рабочий день на шахте с началом войны был установлен 12 часовой! Радостные, возбуждённые и гордые сознанием приобщения к труду, мы спускались в шахту, мечтая отметить первый рабочий день, как праздник: пойти в кино, на танцы. А выползли мы из шахты измученными непосильным трудом, голодными, усталыми. Первым делом завалились в столовую и потребовали всё, что есть, на стол. Ели долго и упорно, как и работали. А после еды, едва добравшись до общежития, уснули "мёртвым" сном.

Конечно, работа в забое так долго продолжаться не могла. Опытные шахтёры потребовали забрать от них "молокососов", которые мешают,

тормозят работу, не дают возможности выполнить план, а значит, и заработать должным образом.

Нас перевели на поверхность, на легкую но бессмысленную работу: наводить порядок на шахтном дворе, и забыли о нас. От такой работы я затосковал и пошёл искать институт, где можно было бы учиться. Нашёл в городе Сталино (ныне Донецк) горный индустриальный институт, подал "документы" — справку о том, что мои документы приняты в Киевский университет. Мне сказали, что нужна печать на справке, удостоверявшая её подлинность. По радио мне стало известно, что Киевский университет эвакуирован в Харьков. Собрав свои наличные деньги, я отправился в Харьков за печатью. Доехал, нашёл университет, встретил на лестничной площадке ректора университета А.Н.Русько. Я его знал, так как ходил к нему в Киеве с просьбой разрешить мне поступать в университет без паспорта, зато с аттестатом отличника. Тогда он мне отказал, послал в Министерство просвещения за разрешением. А теперь, в эвакуации, на лестничной клетке, без всяких размышлений, положил справку на перила лестницы и, шлёпнув печать, расписался. Я несмело напомнил ему, что у меня аттестат отличника - это давало право на повышенную стипендию. Он и тогда, не задумываясь, написал "сдан аттестат отличника" и поставил вторую печать.

Всё дальше на восток

Поступив на горный факультет, где полагалась наибольшая стипендия, я перебрался в студенческое общежитие, готовясь к началу учебного года 1 сентября. Проучился я только пять дней. Студентов института забрали на военный завод — помогать делать снаряды для армии. И я стал завинчивать шурупы в ящики для снарядов. 1 шуруп — 1 копейка заработка. На коленях, прижимая к груди ручную дрель, я зарабатывал 5-7 рублей в день. Мой напарник, старый шахтёр, крутил дрель столь неистово, что получал 15-17 рублей в день.

Случайно я обнаружил, что имеется другая возможность заработка: ремонтировать бракованные ящики. За каждый ящик полагалось 18 копеек. Мы ползали по горам бракованных ящиков, выискивая такие, на ремонт которых уходили считанные минуты.

Немцы уже давно взяли Киев и двигались по направлению к Донбассу. Завод эвакуировали на восток, а нас, допризывников, просто уволили, как ненужный балласт. Изначальная идея была разумной — спасти молодёжь от немецко-фашистской оккупации, а вот схему её реализации никто не продумал. В этом проявилась прочная сущность советской системы: без указания сверху — никакой инициативы. А надо было предусмотреть ответственность руководителей предприятий за доверенных им допризывников. Завод уехал; уехал и мой друг Петя к своим родителям, на Урал. Он звал меня с собой, уговаривал. Я хорошо

знал его родителей, много часов и дней я проводил в его квартире, на Подоле, встречаясь с девушкой, одноклассницей. Согласиться мне было неловко — я не хотел быть обузой в чужом доме.

Мы трое, Миша, Гриша и я, — мальчишки из одного двора, собрали свои нехитрые пожитки и отправились в "Ташкент, город хлебный". Легко доехали до Батайска (узловая станция за Ростовом). А дальше в поезда нас не пускали. Ехали набитые до отказа спальные вагоны, загруженные десятками чемоданов, свёртков, ящиков. В купе — по одному, два человека. Мне удалось проникнуть на третью полку. Стал звать друзей. Меня обнаружили и вышвырнули из вагона. Я был небольшого роста, только что исполнилось 16 лет, без родителей, без дома, без средств к существованию. В вагонах ехали жирные, откормленные "совбуры", безжалостные, бездушные, как и их "учитель" Сталин.

Один из поездов оказался плохо охраняемым, и мы влезли, сперва на ступеньки вагона, а затем в просвет между вагонами. Тогда они не были загорожены, как теперь. Однако на стыковочных узлах долго не постоишь. И мы, по примеру других, забрались на крышу вагона. У меня был серый тонкий плащ. Я закутался в него и уснул. Проснулся от толчков друзей: мои ноги свисали с крыши вагона, того и гляди мог скатиться на землю на ходу. Пришлось привязаться ремнем к трубе для надёжности. Так и ехали мы три дня по Сальским степям до самого Сталинграда.

Любопытное знакомство состоялось у меня в эвакуационном пункте Сталинграда, где мы стали на учёт, и нам положены были продукты питания на три последующих дня.

Там оказалась молодая женщина с трёхлетним ребёнком. Она вышла замуж за поляка. Жили до войны просто: работали, копили деньги, а в отпуск отправлялись на знаменитые курорты мира. И вдруг — война, эвакуация. Началось великое движение народов. Волна эвакуации подхватила молодое семейство. Галина была в восторге: сопереживать в такой исторический момент! Это тебе не пляжи Канарских островов, где все эмоции — в неге и безделье. На каком-то этапе Галина потеряла мужа. Однако она сохраняла оптимизм: встреча с мужем неизбежна. Затем её ограбили, отобрали очень нужные для малыша вещи. Стало беспокойно. К тому же малыш заболел поносом, лекарств нет, лечить негде. Великое движение народов стало грозной разрушающей силой. Исчез оптимизм. Сохранилось только чувство самозащиты. Погас блеск в глазах. Они смотрели настороженно, тревожно. Мне хочется думать, что Галина нашла мужа, вылечила сына, благополучно пережила эвакуацию в Средней Азии и вернулась в свой родной дом в Польше. И теперь, у камина, когда замирают угольки и лишь изредка вспыхивает вырывающийся наружу газ, Галина вздрагивает от нахлынувших воспоминаний об эвакуационной одиссее, с умиротворением оглядываясь на окружающую её привычную домашнюю обстановку, на внуков, шумящих поблизости, на мужа,

глядящего в экран телевизора. И странное чувство овладевает ею. Щемящая боль ушедшей молодости смешивается с тревогой за судьбу подрастающего поколения. Не дай Бог им пережить такое!

А наше путешествие продолжалось. Снова на поезде, но уже в вагонах, мы доехали до Астрахани. Здесь в эвакупункте я и встретил последний раз Галину с уже выздоравливавшим ребёнком, в очереди за ливерной колбасой. Когда дошла моя очередь, я стал просить добавки, ссылаясь на то, что нас трое молодых допризывников. Продащицу была неумолима, но когда я попросил колбасу, валявшуюся на полу магазина, она тут же смягчилась и отвесила ещё такую же порцию.

Дальше мы поплыли пароходом в трюме. Нам повезло: ворвавшись одним из первых в трюм, я занял места в дальнем конце, на возвышенности возле иллюминатора. Счастливые достигнутым, мы расположились на своем тряпье, нарезали толстым слоем ливерной колбасы на квадратные куски хлеба и с наслаждением жевали, впитывая вкус и аромат бутерброда. Запили кипятком с сахаром и стали наблюдать, что происходит внизу. А там расположились евреи из Бессарабии. Они ехали многочисленными семьями, многие были знакомы между собой. Были среди них пожилые, седовласые, профессора, преподаватели вузов, были и просто жители городов и посёлков Молдавии, бежавшие от немецкой оккупации. Впрочем, попадались и цыганские семьи. Помню, молодая цыганка в цветастом платке после нехитрого ужина с вином стала плясать на пятачке под звон бубна. Утомлённые дальней дорогой, оставшиеся без крова и вещей, люди ехали в неведомую страну, сохраняя достоинство и чувство юмора. Живая масса, сбитая в трюме пароходика, жила, общалась, изредка ругалась, смеялась и плакала. Конечно, была и тоска, и боль об утерянном крове, но не выплескивалась наружу злобой, недоверием, равнодушием.

Бухарский пединститут

Три дня пролетели незаметно, и вот мы снова сели в поезд в Гурьеве на последнем этапе к Ташкенту. Город встретил нас по-восточному ярким солнцем, мирной жизнью. Мы отправились в Министерство образования получать направление в университет для учёбы. Нам объяснили, что мест в университете нет, и предложили Бухарский пединститут. Странно, ведь Киевский университет во время оккупации Киева находился как раз в Средней Азии. И мне, как студенту университета должны были сказать об этом. Не судьба! Наверное, неразбериха, царившая в государственных органах во время войны, захлестнула и глубокий тыл. Не сомневаясь в правильности избранного пути, мы поздно вечером добрались до Бухары, нашли педагогический институт. Нам повезло, в канцелярии мы застали ректора института, который тотчас же принял у нас документы, дал направление в общежитие и повёл нас в буфет. У нас на троих было всего

15 копеек. Хозяйка буфета небрежно положила на весы большую часть буханки и, не глядя на стрелку, тут же сняла хлеб с весов и вручила нам, по сути, "за так". Видимо, неделя (а может и больше) дальней дороги настолько нас "укатала", что наш жалкий вид поразил всех здешних узбеков. Ректор спросил нас: "На что жить будете?" Я гордо ответил: "На стипендию, у меня аттестат отличника". Как хорошо быть уверенным в себе! На следующий день я продал свои часы за 20 рублей. Мы получили хлебные карточки — по 400 граммов хлеба в день; началась наша учёба в Бухарском пединституте на литературном факультете. Почему не математический? Мои дворовые друзья заявили категорически: "Мы математику не потянем". А мне было всё равно, отделяться от друзей не хотелось. Уверенность в том, что всё происходящее — преходяще, что всё вернётся на круги своя; вернусь я домой в семью и буду учиться в своём родном Киевском университете, — была безусловная. Конечно, на мою стипендию отличника прожить было невозможно даже одному, а тем более троим. Я нашёл работу. Сначала поступил на курсы механика по швейным машинам, а затем получил работу помощника механика в швейном цехе, где стояло, думаю, значительно больше чем сто швейных машин. Мы вдвоем с механиком должны были обеспечить работу машин с минимальными простоями на ремонт. Так я познакомился на практике с вероятностной задачей обслуживания станков ограниченной бригадой. Спустя 50 лет я стану заниматься этой задачей профессионально и предложу алгоритм диффузионной аппроксимации, когда число станков растёт к бесконечности пропорционально вместе с числом обслуживающих приборов, а применение алгоритма возможно и при фиксированном числе станков.

Рабочему полагалась хлебная карточка на 600 граммов в день. Так что, имея две карточки в сумме на килограмм хлеба в день и дополнительный заработок к стипендии, можно было сносно существовать. Однако денег почему-то никогда не было. Я ходил в драной обуви с отваливающимися подошвами, носил свой взятый из дому плащ, когда-то благородного серого цвета, а теперь — "серо-буро-малинового", весь испещрённый пятнами от прожитой в нём жизни. Однажды ректор института, встретив меня на улице, сказал: "Чтобы я тебя больше в этом плаще не видел. Исключу из института". Учёба в институте меня не слишком обременяла. Я ходил выборочно на лекции, когда не был занят на швейной фабрике. Больше всего я любил лекции по древнеславянскому языку. Преподавательница — молодая красивая женщина с удивительным певучим и звонким голосом, присущим только сказителям древних баллад, все гда притягивала мое внимание. Но и эти лекции я пропускал. А когда она спрашивала своим мелодичным голосом почему я не хожу на лекции, я неизменно отвечал: "Ах, милая Александра Ивановна, я всей душой стремлюсь на Ваши лекции. Да на голодный желудок они плохо

воспринимаются". Кто-то подсказал мне, что весь хлеб съедать не выгодно, лучше часть продать на базаре. А за вырученные деньги можно купить каймак (узбекская топлёная сметана — удивительно вкусная). Я так и делал. Шёл к вечеру на базар, продавал за 25 рублей пайку хлеба, а за эти деньги покупал пиалу каймака и урюк. Наедался сытно с оставшимся хлебом и шёл в городскую библиотеку с роскошным читальным залом. В книжном фонде библиотеки города Бухары были "залежи" французских писателей: Бальзак, Гюго, Флобер, Проспер Мериме, Дюма и т. д. Начитавшись любимых авторов, я вечером, не спеша, бродил по засыпавшей Бухаре, воображая себя участником описанных в книге событий.

Друзья познаются в беде

Как всегда неожиданно, пришла беда. Я заболел сыпным тифом. Меня поместили в местную клинику в палату, где я пролежал неделю в беспамятстве с температурой около 42 градусов. Придя в себя, я ощутил неистовый голод. А тумбочка моя была пуста. Недолго думая, с трудом передвигаясь, я стал открывать тумбочки соседей по палате. Одна была наполнена едой с запасом. Хозяин лежал в беспамятстве; помня свой опыт, я понял, что сейчас ему эта еда ни к чему. Перетащив к себе в тумбочку изрядную часть, я быстро насытился. Однако мой поступок не остался незамеченным. Кто-то донёс медперсоналу, требуя изгнать меня из больницы. Старый врач, узбек, пришёл разобраться в ситуации. Поглядел на умирающего узбека с запасами еды и горько проговорил: "Эх вы, жадные люди! Разве вы не видите, что этот юноша может умереть с голоду. А рядом лежат хлеб, овощи и фрукты, которые хозяину уже не понадобятся. Умерьте своё возмущение. Этот парень останется в больнице до полного выздоровления". Все притихли. Пришёл долгожданный Гриша с грустным лицом, сообщив, что обе мои хлебные карточки, которые я им оставил, уходя в больницу, потеряны, а потому он не смог принести мне хлеба. Пришлось мне выздоравливать на больничном пайке. Когда меня выписали из больницы, я не смог преодолеть подъём в полметра высоты. Пришлось карабкаться на четвереньках.

Вернувшись в общежитие, я с удивлением узнал от соседей, что мои дворовые друзья, Миша и Гриша, подружились с продавцами хлеба по карточкам в нашем общежитии и теперь получают от них хлеб буханками на продажу, а выручкой делятся с продавцами — эвакуированными евреями. После этого в совершенно новом ракурсе предстала "потеря" моих хлебных карточек и отказ поделиться со мной хлебом. И тогда я впервые за всё время нашего совместного путешествия из Донбасса, получив деньги в сберкассе по бережно хранимой отцовской сберкнижке, пошёл на базар, накупил продуктов и не поделился со своими попутчиками. А на следующий день, рано утром, в общежитии состоялся

невиданный торг. Я попросил Гришу одолжить мне пайку хлеба (400 граммов). Он заявил, что хлеб у него есть, но он не может мне одолжить, потому что этот хлеб принадлежит не ему, а продавцам. Он должен вернуть им деньги за него. Тогда я предложил ему продать мне эту пайку хлеба. На что Гриша категорически не согласился, так как не может продавать хлеб своему другу. Тогда я сказал: "У тебя нет денег. Вот тебе 25 рублей, я их тебе даю как другу. А теперь ты можешь мне, как другу, дать пайку хлеба?" И Гриша согласился... Этот необычный "дружеский торг" происходил на глазах присутствовавших здесь же, в огромной комнате общежития, наших товарищей-студентов. Когда я вышел из комнаты, на меня набросились студенты с кулаками, едва не избили. А за что? Думаю, что как раз меня-то и не стоило колотить. На том наши пути-дороги разошлись навсегда.

Заканчивался учебный год, наступила весна, а точнее — ужасающая жара пустыни Каракум. Трудно было перемещаться по городу под безжалостным солнцем. Мой горемычный плащ уже не защищал меня от палящих лучей. Подошвы на ботинках отвалились полностью. Ходил, в основном, босиком, лишь в самых необходимых случаях подвязывал подошвы к ботинкам шнурами.

Пора экзаменов

Оказалось, что это совсем не страшно. Пришёл я на экзамен по психологии с толстенным учебником, который увидел за несколько дней перед экзаменом. Профессор медицины, импозантный еврей из Черновицкого университета, предложил мне экзаменационный билет. Я прочёл вслух первый вопрос. Он на него подробно ответил! Я прочёл второй вопрос и вновь получил исчерпывающий ответ! В итоге мы поблагодарили друг друга за приятную беседу, и он поставил мне отличную оценку. Профессор оказался очень тонким психологом... Экзаменаторов, подобных ему, я, конечно же, никогда в жизни больше не встречал.

Впрочем, беда пришла совсем с другой стороны. По положению, эвакуированные (не местные) студенты освобождались от платы за учёбу. Однако для этого надо было написать заявление. Я же такого заявления не писал. Меня пару раз предупредили. И в результате я прочёл приказ об отчислении меня из института за неуплату за учёбу. Такого вероломства от ректора я не ожидал. Мы с ним были в доверительных отношениях. Я всегда чувствовал, что он жалеет меня, старается оберегать от неприятностей. И вот на тебе! "Отчислить и выселить из общежития". К счастью, почти одновременно я получил повестку из горвоенкомата с требованием срочной явки на призывной пункт. И тут моё сердце разыграло мстительностью. "Уйду из института, из общежития. Пусть ректор меня ищет". Рассчитавшись на швейной фабрике, забрав

документы из института, я побежал в военкомат. Увидев меня, военком остолбенел: "Это что ещё за фокусы? Призывник Красной Армии босиком? Немедленно возвращайся домой и приходи в приличной обуви". Спорить я не стал. Дома у меня нет и скоро не предвидится. Пошёл я на бухарский рынок, нашёл старьевщика, купил у него за пятёрку драные ботинки, отнёс ботинки сапожнику. За 25 рублей сапожник стачал ботинки так, чтобы я смог дойти с базара до военкомата "Вот это другое дело", - сказал военком и отправил меня в зал ожидания для отправки в армию. Поздно вечером меня вызвали к военкому. "Произошла каверзная ошибка. Ты, оказывается, ещё мал для армии, хотя школу уже окончил год назад. Как это тебе удалось? Впрочем, это неважно. Собирай свои пожитки и отправляйся домой. Придёшь в следующем году". Вот тут-то я и ощутил холодок настоящей беды. "Никуда я не пойду. Дома у меня здесь нет. Из института меня исключили. Жить негде... А то, что я 25-го года, так это ошибка в паспорте. Вот мои родители, отец и мать могут это подтвердить". Вдохновенная ложь всегда спасительна, какой бы нелепой она не была. Военком обрадовался. "Садись, пиши заявление". Так и повторил я в заявлении свою выдумку. Военком не потребовал подписей родителей. Он всё прекрасно понимал. Понимал, что единственный спасительный якорь для меня - армия. Спасибо ему. Так я стал на год старше.

Военное училище в Коканде

На следующее утро, поездом, нас отправили в Коканд, в Харьковское военное авиационное училище связи (ХВАУС). Меня определили на факультет проводных средств связи: телефоны, телетайпы, аппараты Морзе. Жаль, что не на радиотехнический. Тогда я стал бы инженером-радиотехником, о чём всегда мечтал мой отец. Повороты на жизненном пути, как правило, нам не подвластны. Это - Божье провидение. Надо только самому чётко видеть конечную цель пути и активно корректировать создавшуюся ситуацию. У меня не было выбора, я стал изучать аппаратуру проводных средств связи, работать на телетайпе - телеграфный аппарат с клавиатурой пишущей машинки. Вскоре, меня заметил майор Колесников - высокий, стройный, предельно собранный офицер, хорошо знавший предмет и умевший изложить его в доходчивой форме. Недоумение вызывала только застывшая грусть в его глазах. Впоследствии я узнал, что у него погиб сын на фронте, отправившись туда добровольцем. Он был таким же 17-летним недорослем как и я. Колесников стал водить меня в старшие классы, демонстрировать работу вслепую на телетайпе. А ещё я сам придумал для себя игру. На дежурстве, стоя у ворот училища, от нечего делать я пытался в уме воспроизвести устройство телетайпа и последовательность его действий. Это обеспечило мне преимущество на лекциях, когда преподаватель задавал вопросы.

Чтобы правильно ответить на них, надо было смотреть на схему аппарата. А я с детства был близоруким. Очков у меня в армии не было, да и не могло быть. Я дал клятву военному, что никто не догадается о моей близорукости. Однако сержант нашего отделения, мужик недалёкий, но хитрый (а хитрость, как говорят философы, — это ум дурака), раскумекал мою тайну и стал шантажировать меня по мелочам. Заставлял пояснять ему трудные места в учебниках, наказывал уборкой туалета, чаще посылал на ночные дежурства. Всё его ехидство происходило от убогости ума. Я это понимал и терпел... до поры до времени. Когда же подленький сержант попался на воровстве продуктов из чужой посылки, я устроил ему такой "разбор полётов", что негодяю пришлось уйти из нашего отделения, да и училища он не смог окончить.

Каким я был курсантом? Трудно из сегодняшнего далёка объективно оценить тогдашнюю обстановку в училище. Думаю, что учёба для меня представляла чисто спортивный интерес. Техника проводных средств связи казалась мне примитивной, а муштра вызывала чувство протеста. Большинство преподавателей и все строевые командиры меня невзлюбили. А за что было любить? На команду: "Курсант Королёк" - я отвечал сидя: "Я". Майор Продан, руководитель цикла, возмущённо пояснял мне, что я должен немедленно встать, и подойти строевым шагом, остановившись, как положено, в двух метрах перед офицером, и заявить: "Товарищ майор, курсант Королёк по вашему приказу явился". Мне явно не хотелось заявлять о своём присутствии столь пространно, зато отважился задать майору Продану "наивный" вопрос: "Как вы можете учить курсантов работать на телетайпе, если сами не умеете?" К тому же, у меня не получалось хождение в строю, что вызывало ярость любителей муштры. Правда, после заболевания гепатитом я получил разрешение ходить "сам по себе" и одиноко плёлся вслед за бодро шагавшей по мостовой ротой курсантов.

В начале августа 1943 г. мы закончили годичный срок обучения и ждали направления в армию. Майор Колесников спросил меня, как я отношусь к предложению остаться в училище и работать у него на кафедре лаборантом. Я категорически отказался. Мы с ним повздорили. Однако это не повлияло на его решение оставить меня в училище. Более того, и на комиссии по распределению он был практически единственным, кто настаивал на моей работе в училище. И он добился своего. Вторично препираться с ним, уже моим начальником, было бессмысленно. Думаю, что смерть собственного сына, моего одноклассника, была основной причиной его желания уберечь меня от гибели на фронте. Здесь можно с уверенностью сказать: "Бог был милостив ко мне". Наши отношения с майором были отнюдь не безоблачными. Я, с присущей юности глупой жестокостью, игнорировал его душевные чувства ко мне, я видел в нём преграду к свободе на фронте, в армии, где нет удушливой регламентации

повседневной жизни. Колесников хотел сделать из меня офицера, а это было невозможно. Я ещё ни разу не брился, а уже носил форму офицера авиации с небрежно, набекрень одетой фуражкой. За воротами училища был мир живой жизни, в которую хотелось окунуться безоглядно. Мы поселились на частных квартирах. У моей хозяйки была взрослая дочь, намного старше меня. Она расспрашивала меня, с кем из холостых офицеров можно познакомиться. А я думал: "А почему ты не хочешь выбрать меня?" Приехавший из Ташкента новый майор, увидев меня на улице, решил, что он попал в детский сад, а не в военное училище. Наши "художества" (молодых офицеров, оставшихся работать в училище) в парках Коканда доставляли много хлопот военным патрулям. Однажды я нахамил начальнику военного патруля так, что он решил отправить меня в тюрьму, а не на гауптвахту, как обычно полагалось. К счастью, тюрьма была в то время на ремонте.

Внутри училища мы были дружны, знали своё дело и трудились с азартом. В моём распоряжении был класс с более чем 20 телетайпами. У меня в подчинении находился старший сержант, сверхсрочник, в летах, прекрасно знавший технику. Он, как и многие ремесленники, не любил делиться секретами своей профессии. Случалось, я долго, но безуспешно возился с неисправным аппаратом. А сверхсрочник мог с ухмылкой подойти, стукнуть пару раз по телетайпу в нужном месте, и тот "оживал". Это меня бесило. Я решил не подпускать его к неисправным аппаратам, пока сам не научусь их ремонтировать. Он, посмеиваясь в усы, благодушно расхаживал по классу, пока я часами сидел, разбирая и собирая аппаратуру. А ведь я в совершенстве знал конструкцию аппарата, схему его функционирования! Но нас не обучили распознаванию причин функциональных дефектов. Боюсь, что и современные инженеры не изучают дефектные ведомости. Я, конечно же, оказался победителем в единоборстве с опытным ремонтником. Изучив основные причины неисправностей, я уже мог в считанные минуты восстановить работоспособность аппаратуры безо всякой посторонней помощи. Ага! Теперь я, обнаружив неисправный аппарат, приказывал сержанту восстановить его. И уже я ухмылялся, когда у того не получалось. В конце концов, мы подружились. Я всегда мог на него положиться. За это и был однажды наказан майором Колесниковым. Поручив мне подготовить к работе класс, майор обнаружил, что вместо меня работал сержант. Меня немедленно вызвали к майору, который заявил, что я позорю честь офицера, перепоручая свою ответственность. Мы поругались в который раз, хотя и испытывали взаимную симпатию. Я, наконец, понял причину его явного расположения ко мне.

Киев освобождён от оккупации!

Восстановилась связь с семьей. И сразу же я узнал, что спустя несколько недель после освобождения Киева, по доносу, был арестован мой отец. Это был гром среди ясного неба. Весь мой юношеский оптимизм исчез в мгновение ока, ибо прервалась связь времён. Отец был моей опорой в образовании, в увлечении математикой, в досрочном окончании школы, когда я сдал экстерном экзамены за 9-й класс и перескочил из 8-го в 10-й. Его присутствие за моей спиной означало уверенность в завтрашнем дне, в будущем. Теперь я остался один в мире, который впервые показался мне враждебным. И это ощущение уже не покидало меня никогда. Со временем жизнь научила меня загонять в подсознание тяжёлые, гнетущие мысли.

Итак, радужный свет изнутри погас. В стремлении загнать тоску по утраченному отцу поглубже молодой, беспечный младший лейтенант становился гулякой, теряя день за днём свои излюбленные привычки: читать книги, размышлять о проблемах на работе, искать друзей. Теперь пьяное веселье затмило горизонты. Конечно, моё поведение было замечено майором Колесниковым. Мы крепко поссорились, после чего я плакал, чувствуя, что теряю и здесь ставшего мне духовно близким человека. В завершение всех бед у меня вытащили в очереди в кинотеатре кошелёк, где был мой комсомольский билет. Состоялось заседание партийной комиссии, на которой один из моих ближайших коллег сидел, уткнувшись в газету. Я всё понял. Не стал перечить, оправдываться. Сыну арестованного отца не подобало быть комсомольцем. Меня исключили из комсомола "за потерю бдительности". Удивительно, как в жизни переплетаются события: "спустя 10 лет я снова буду исключён из комсомола. Но об этом я расскажу в другом разделе.

Переезд с училищем в Харьков

Наступил 1944-й г. Харьков был освобождён от оккупации после кровопролитных боев. Наше училище готовилось к переезду в Харьков, на своё коренное место. В училище выделили небольшой передовой отряд младших лейтенантов с техникой для восстановления систем связи в зданиях училища в Харькове. Я попал в этот отряд как специалист по телетайпной аппаратуре. Получив довольствие, мы отправились пассажирскими поездами — сперва в Ташкент, затем из Ташкента в Сталинград и далее в Харьков. Замечательным было пробуждение в Аральске от неистового вопля: "Дыни!.. Дыни!.. Дыни!". Купив мешок дынь, и несколько небольших мешков соли, мы умудрились оставить наш громоздкий ящик с телетайпом в предыдущем вагоне во время пересадки. Хорошо, что поезда в то время ходили не по расписанию. Обнаружив пропажу, мы бросились на поиски нашего ящика, что было совсем не просто на узловой станции, забитой до отказа военными эшелонами и

пассажирскими поездами. Счастье нам улыбнулось — мы едва успели на наш поезд. В Харьков мы приехали богачами, распродав соль по пути в Украине. Это был драгоценный товар во время войны.

Непросто было восстанавливать линии связи в разгромленном немцами громадном здании училища. Ещё сложнее было восстанавливать линии передачи электричества. Близилась зима... На ветру, зацепившись на столбе "кошками", тянули мы электрические провода из последних сил, замерзая наверху и отогреваясь самогоном внизу. Однажды мы взбунтовались. "Почему офицеры выполняют чёрную работу?" Заместитель начальника училища пригласил нас к себе в кабинет и "объяснил", "влепив" каждому из нас по пять суток домашнего ареста (после работы, разумеется). Выходя из кабинета, я запел свою любимую песенку "Легко на сердце от песни весёлой..." Полковник тотчас вернул меня в кабинет, добавил ещё пять суток и заявил, что он "всё равно проживет остаток дней лучше меня". Вот какой уродливой бывает зависть к молодости, беспечности, независимости, хотя бы внутренней! Жизнь в Харькове после освобождения постепенно налаживалась. Стали появляться места для развлечений. Незабываемый вальс в громадном высоком зале в клубе, с девушкой в белом платье. Вальс, бесконечный ночной вальс. Юноше, лишённому материнского ласкового слова, отеческих наставлений, хотелось человеческого тепла, женской ласки...

Победа

Я проснулся 9 мая в постели подруги, в центре Харькова, услышав крики возбуждённой радостной толпы, выплеснувшейся на улицы города. Победа!... Настал долгожданный момент, когда жестокая беспощадная война, унёсшая жизни и сломавшая судьбы десятков миллионов людей, уйдёт в прошлое, в историю. Мне нет ещё и 20 лет, я — молодой лейтенант с погонями авиационных войск, служу в Харьковском военном авиационном училище связи инструктором практического обучения, а заодно и заведываю классом телетайпов — телеграфных аппаратов, на которых курсанты обучаются передавать сообщения по проводам. Наше училище было расположено на Павловом поле, на окраине Харькова. За нами — сельцо и жалкие посадки молодых деревьев, постепенно исчезающих в печных топках живших в окрестностях хозяев частных домов.

Наш рабочий день длился 14 часов: с 6 утра (построение на поверку) и до 20.00, после ужина офицеры расходились по частным квартирам. Мы жили коммуной, три младших лейтенанта — Рудольф Хайкин, Саша Верещагин и я, в отдельном флигеле, в котором была одна комната и небольшая кухня с плитой. Кроватей — только две, третью поставить было негде, так что третий спал на столе. Третий назначался по очереди. На отопление флигеля хозяйка дров не давала, а нам добывать их было

некогда, да и неохота. Училище выделило в молодой посадке каждому офицеру участок пеньков высотой до одного метра. Надо пилить, добывать транспорт, везти на квартиру. Так добросовестно трудятся только старшие, семейные офицеры. Нам, молодёжи, это ни к чему. Мы нарубили деревьев на соседнем участке, договорились с хозяином подводы в соседнем селе и... попались с поличным! Пришлось вернуть дрова "законному" хозяину-лесничему, а самим согреться самогонкой, купленной в той же деревне. Иногда, если по случаю у нас оказывались дрова, мы пользовались ими бережно, согреваясь на стуле, установленном на слегка тёплой плите. Не помню, чья была идея, но мы собрались группой, человек шесть, и ночью спилили толстенный столб высоковольтной линии, на котором не было проводов. Тут же разрезали его на части и развезли по квартирам. И снова попались. Кто-то донёс. Было назначено следствие. Руководил расследованием капитан Александров. Все откровенно сочувствовали нам, но руководству надо было реагировать на варварский поступок офицеров училища. Прямых доказательств нашей вины найти не удалось. Наличие незаконно спиленных частей столба у наших хозяек означало лишь, что мы причастны к преступлению. В итоге наказание было символическим: 15 суток домашнего ареста. Это означало, что вне работы мы обязаны были находиться неотлучно дома. Да кто будет проверять? Правда, символическим это наказание считать нельзя, потому что из зарплаты удерживали 50%. Однако само "довольствие" было настолько мизерным, что потеря половины его была практически не ощутимой. Вспоминая этот эпизод, я пытаюсь понять, насколько далеко могло зайти равнодушие к окружавшему нас миру в военное время. Здесь уместно привести знаменитое изречение Эммануила Канта, чьё воображение поражали две вещи: "звёздное небо над нами и нравственный закон внутри нас". (Кстати, "нравственный закон" отменили "классики социализма" Ленин, Сталин, Гитлер). Пожалуй, нравственное падение безгранично, если только нет существенных сдерживающих принципов внутри нас и в обществе. Но о каком общественном влиянии могла идти речь во время чудовищной войны?! Общество было разобщено и сузилось до пределов замкнутого в себе коллектива. В нашем случае - это училище. Остальной мир был нам чужд, а иногда и враждебен, поскольку нас с ним ничего не связывало. Так что, когда училищу понадобился асфальт для площадки, на которой полагалось водружать флаг, то команда курсантов под руководством предприимчивого офицера сняла асфальт в самом центре города, на площади Тевелева, нисколько не сомневаясь в правомочности такого деяния. Правда, отсутствие общественно значимых принципов в нашем поведении за пределами училища отнюдь не означало, что мы были вовсе безнравственными. Редко кто опаздывал на утреннее построение — это считалось ЧП. На службе каждый из нас "выкладывался" полностью.

Мы любили свою работу, бережно относились к военному имуществу. Никому и в голову не могло прийти, что можно вынести из училища ценную аппаратуру и продать с выгодой для себя. Мы были членами единой команды и полностью подчиняли себя правилам поведения в коллективе. В нашем коллективе было много офицеров, призванных в армию во время войны из университетов и инженерных институтов. Они были старше нас, молодых лейтенантов, умнее, воспитаннее. Мы тянулись к ним, пытались понять их, старались дружить с ними. Мое желание в начале войны продолжать образование и стать математиком исчезло после поступления в училище. Где-то в глубине души ещё теплилась надежда вернуться в Киевский университет, в который я поступил сразу после начала войны. Однако эта надежда, как звёздочка на туманном небе, светилась редко. Мои старшие товарищи сетовали: "Наше образование совершенно бесполезно в этом училище. Зачем тратить юные годы на студенческую жизнь? Надо думать о военной карьере. Это значит, надо поступать в военную академию, после которой можно стать старшим офицером, а далее, после 25 лет службы — заслуженная пенсия и беспечальное житье". Но я не желал себе такой судьбы. И вот — конец войне! Я вышел на балкон, смотрел на веселившуюся толпу и плакал от счастья, от горя, от тоски по дому, родным, и особенно, по отцу. Тут же я поклялся, что резко изменю свой образ жизни, прекращу бессмысленные попойки, ночные бдения за преферансом и возбуждающие похождения по танцплощадкам Харькова. Оказалось, что найти в Харькове университет не стоит больших усилий. Он здесь, в центре города. Надо только проявить настойчивость и поверить в себя. А для этого надо было, прежде всего, изменить образ жизни, уйти из флигеля, от товарищей, беспечно прожигавших молодость. Что я и сделал. Перебрался к суровой хозяйке, в дом за высоким забором, со злой собакой во дворе. Мне было запрещено водить в дом друзей и подруг, приходиться пьяным и поздно. Я принял эти условия, поступил на 1-й курс математического факультета Харьковского университета и стал прилежно заниматься математикой. Война ещё не ушла из нашей жизни, вспыхнув уже на востоке, с Японией. Может быть, поэтому правила поведения в училище стали более строгими. Посещать лекции в университете, даже во время заочной сессии, я не мог. Мне было разрешено посещать университет только в дни сдачи экзаменов, да и то — "если это не было помехой для службы".

И всё же война уходила в прошлое. Осенью мне разрешили посетить родных в Киеве. Я получил довольствие, паёк, бесплатный железнодорожный билет и отправился в Киев. Поезд пришел в мой родной город в середине ночи. В Киеве хозяйничали банды мародёров. Городского транспорта не было. Я пошёл с вокзала пешком с вещмешком на плече по улице Саксаганского. Мои родные — бабушка, мать и сестра жили в конце улицы Владимирской, снимали квартиру из двух комнат в

частном доме. Я их с трудом разбудил. Они не могли поверить в моё возвращение, так давно мы расстались, не только по времени, но и по событиям. Наконец, бабушка решила открыть мне калитку, и мы обнялись. Самое страшное было то, что мы избегали смотреть друг другу в глаза. С нами не было отца. И этого никак нельзя было объяснить. А когда мать рассказала, как отец пришёл в Киев и, не застав меня, рыдал, я осознал всю глубину его горя и ощутил себя сиротой.

Возвращение в КГУ

Спустя год после окончания войны обстановка в училище изменилась. Начали думать, что делать с нами, "недоучками" военного времени. Пришло указание — отобрать лучших для поступления в военную академию. Но я среди "лучших" никак не мог быть: отец — в ссылке, я — исключён из комсомола. Потом, уже в Киеве, мне удалось посмотреть моё личное воинское досье. Там я вычитал рапорт моего шефа: "К воинской службе не годен. Готовит себя к гражданской жизни, учится заочно в университете". Спасибо вам, старый хрыч. Добрый был старик в душе ко мне, но суров на службе. Так я получил "вольную" в сентябре 1947 г. В Киеве я понял, что мне предстоит новое суровое испытание: мать не работала, шила знакомым за гроши, сестра училась в мединституте, а бабушка — вечная хранительница нашего очага, обеспечивала пропитанием из ничего. Мать без колебаний согласилась на то, чтобы я продолжал учёбу в университете. А там видно будет... Не сомневаясь в моих правах быть "восстановленным" студентом КГУ, теперь с 3-го курса обучения, я подал документы в ректорат и через день получил отказ — "мест нет, ресурс стипендий исчерпан". Я вторично подал документы и пошел на приём к ректору. Ректор обещал "разобраться"... И снова отказ. В третий раз я написал заявление. Жаль, что не помню, какие аргументы я привёл. Но в результате была положительная резолюция, нашлась стипендия для меня, участника войны, добровольно начавшего службу в армии в 17 лет. Хорошо помню моё первое появление на 3-м курсе механико-математического факультета. Настороженные взгляды холёных девичьих лиц, не познавших тягот военного без отцовского детства, на высокого худого юношу в серой офицерской шинели (без погон), в сапогах и гимнастерке. Один из служивших, как и я, в армии студентов живо откликнулся на мой растерянный вид, предложил место возле себя, разговорились: "На что рассчитываешь, студент? Стипендия не ахти". — "А я буду получать повышенную. Мне иначе, никак нельзя". Теперь я понимаю, как удивительно беспечно государство, оставляя молодых сильных мужчин после демобилизации из армии безо всяких средств к существованию. На что надеются такие правители? Что бандитизм их не достанет? И я, действительно, получал стипендию как отличник. А после того, как я один сдал экзамен на "четыре" по теоретической физике, а все

наши "светлые головы" на "три" и провалились, я заслужил уважение в группе и был приглашён на локальный семинар. Началось моё настоящее математическое образование — почти 7 лет спустя после окончания школы. Мы самостоятельно организовывали семинары, посещали спецкурсы на старших курсах, семинары в Институте математики, где меня научили играть в настольный теннис, но не только.

Незабываемыми были лекции и практические занятия Г. Каца по теории функции действительной переменной. Мы обсуждали на лекции постановку проблемы, а на следующей лекции желающие выступали с её решением. Это были очень эффективные уроки творчества. Впоследствии я пытался повторить такой эксперимент, но безуспешно. То ли группа была без творческого огонька, то ли профессор не сумел увлечь студентов. Стоит ли объяснять, почему мы все были увлечены теорией функций, алгеброй, топологией и даже конструктивной топологией, которую мы штудировали на семинарах М. Красносельского. Лучший и наиболее эффективный способ вхождения в новую область математики — организовать семинар для заинтересованных математиков с активным обсуждением докладов, добиваясь полного понимания существа проблемы и метода её анализа. Этот урок Красносельского я часто и успешно использовал в своей творческой жизни. Быстро пролетели два года "беспечальной" студенческой жизни, в конце 1949 г. надо было выбирать тему дипломной работы.

Появление Б.В. Гнеденко в Киеве, в КГУ, и решило мою творческую судьбу.

Послесловие

Советская пропаганда разрушала историческое прошлое народа, но не только. Она стремилась разрушить генетические связи родственников, разобщая семьи, заставляя детей предавать отцов и матерей. Да есть ли еще где-либо в мире более бессмысленное и жестокое деяние властей предержащих?! Святая святых - семья - основа любого общества, в том числе и коммунистического. С безответственностью, граничащей с безумием, коммунисты разрушали семью, надеясь на превращение общества в бесформенную рабскую массу. Именно в такой массе зарождаются и процветают все человеческие пороки. Такое общество заведомо обречено на гибель. Сегодня, спустя более десяти лет после начала "перестройки", мы воочию убеждаемся, как глубоко порочно наше общество. Богатейшая страна Украина прозябает в нищете. Разрушается образование, уничтожается наука, предаётся забвению культура, экономика топчется на месте. А всё потому, что нет идеи, которая объединила бы украинский народ. Незаживающие язвы коммунистического рабства продолжают своё разрушительное действие.

Остановить их можно либо хирургическим путём, либо ждать, когда произойдет их отмирание, а это два-три поколения.

Я пишу эти строки в день Победы (54-й!) в г. Компьене (Франция), где работаю (временно) профессором Технологического университета. Я задаю себе вопрос: "Почему я — академик Украинской Академии наук, должен зарабатывать себе на жизнь на стороне? Почему я не заработал себе право спокойно жить в своей стране, быть полезным своему народу?" Нет ответа на эти вопросы. Да и не может быть. Потому что нас приучили к мысли, что мы и не имеем права задавать такие вопросы. Нам следует довольствоваться нищенским подаянием нашего государства, кстати, намного превышающим пенсии большинства. Так что срабатывает прежняя идеология: "Вы-то на что жалуетесь? Вас ещё балуют. Повремените, уравнием всех!"

День Победы! Ушедший в прошлое вместе с юностью, безграничной уверенностью в будущем. День Победы вернул мне моё любимое занятие - математику. Наверное, весьма вовремя. Хотя меня не покидает ощущение потери темпа. Война затормозила мое образование на пять лет. И каких пять лет! 17-22 — это лучшие годы юности, лучшие годы учёбы в университете, годы интенсивного познания с лёгкостью свежего ума, не засорённого окружающим бытом. Попробуйте в забитой хламом кладовке найти нужную вещь. Так и с моим подсознанием. За годы войны оно настолько засорилось, что понадобились десятилетия напряжённого труда, чтобы очистить хотя бы небольшой участок для творческой мысли. И то, что я до сих пор ещё способен думать, — не столько генетический феномен, сколько результат непрерывных тренировок ума. День Победы! В этот день, но в 1999 г., я подарил себе новую задачу вместе с решением. Дух захватывает от удивления и восторга. Ныне я по-настоящему счастлив. Я вижу перспективу творчества. А это высшая мера счастья для учёного.

Путь в аспирантуру

На одном из семинаров перед летними каникулами Борис Владимирович сформулировал новые задачи, не связанные с тематикой монографии. Он предложил искать точные формулы для распределения статистики Смирнова. Такая формула была уже известна для статистики Колмогорова. Мы с аспирантом Б.В.Ярошевским занялись подгонкой метода вывода известной формулы к построению формулы для распределения статистики Смирнова. И у нас это довольно скоро получилось. Однако полного удовлетворения не было, чувствовалось, что статистика Смирнова при одинаковых объёмах выборки весьма просто устроена. Если проследить за процедурой построения разности между двумя эмпирическими функциями распределения с одинаковым объёмом выборки, то, оказывается, легко заметить, что эта разность имеет

структуру случайного блуждания на отрезке $[-1, +1]$ со скачками $+1/2n$ (n — объём выборки). Причём все траектории начинаются в точке $(0, 0)$. Вторая координата фиксирует положение выборочного значения, распределённого равномерно на отрезке $[0, 1]$. В терминах случайного блуждания распределение односторонней статистики Смирнова задаётся вероятностью того, что случайное блуждание не достигает фиксированного уровня. Теперь остаётся сделать важное открытие: распределение статистики не зависит от расположения выборочных значений, так что для простоты можно считать их заданными в точках $(0, 0)$ и $(0, 1)$. И, наконец, следующее открытие: все различные траектории из точки $(0, 0)$ в точку $(0, 1)$ одинаково распределены (!). Таким образом, задача становится комбинаторной. Надо вычислить число траекторий, не пересекающих заданный уровень.

Однажды на полках книжного магазина я обнаружил книжку индийского физика Чандрасекара. Увлекаясь в детстве астрономией, я из любопытства решил познакомиться с этой книжкой. Каково же было моё удивление, когда я обнаружил, что буквально уже на первых страницах книжки Чандрасекара излагается метод отражений для случайных блужданий. Оставалось только приспособить его к нашей статистической задаче. Откровение снизошло на меня в поезде, по дороге в Артёмовск, куда я возвращался на работу после обсуждения на семинаре формулы для распределения статистики Смирнова, построенной нами с Б.В.Ярошевским. Результат был ошеломляющим. Распределение односторонней статистики Смирнова задаётся соотношением двух комбинаторных выражений; распределение двусторонней статистики — альтернирующей суммой подобных выражений. В восторге от открытия я на ближайшей остановке выскочил из вагона на вокзал, купил открытку, написал на ней и формулы, и доказательство, и отправил открытку на следующей станции в Киев, Борису Владимировичу. Это был апрель 1951 г., раннее весеннее утро. Поезд быстро приближался к Артёмовску. На душе у меня было светло и радостно. По существу состоялось моё первое самостоятельное творческое открытие. Такое не забывается. Счастье и восторг длились довольно долго. Потом, со временем, с каждым новым научным достижением, скептицизм быстро гасил волны восторга. Оставался лишь первый миг удачи. Может, это и есть сущность счастья? Борис Владимирович незамедлительно подготовил нашу совместную заметку в "Доповідах Академії наук Української РСР" (III — 3, 1951). Более того, идея оказалась настолько простой, что не составляло большого труда использовать её и в других, аналогичных задачах. Борис Владимирович привлёк к этой работе своих сотрудников в Киеве Е.Л.Рвачеву и В.С.Михалевича. Каково же было моё удивление, когда я обнаружил в "Доповідах Академії наук Української РСР" статьи, в которых метод траекторий применялся к построению распределений

других статистик. Особенно меня огорчила статья Бориса Владимировича и К.Л.Ющенко, где приводилась формула для совместного распределения двух односторонних статистик Смирнова. Эту формулу я мог бы написать сам без особых усилий, напекни мне только Борис Владимирович о задаче. Вот именно! Намекни! А может, самому надо видеть и понимать кое- что вокруг?

Точные формулы для статистик Смирнова

Я понял и правильно оценил действия Бориса Владимировича, если тематика перспективна и видна дорога к успеху, то надо привлекать всех желающих идти по ней. Богаче будет урожай. Я принялся за поиски формулы для распределения статистик Смирнова в случае соотношения двух выборок n и m : $n = tr$, p — целое число. Комбинаторная задача резко усложняется. Я исписывал горы бумаги, не расставался с формулами даже на танцплощадке, куда меня увлекал мой ещё юный возраст. Итак, творческий задел для аспирантуры у меня имелся с избытком. А в остальном ситуация резко усложнилась. В Киеве учёный секретарь Института математики, узнав о моём намерении, поступать в аспирантуру этого Института, в беседе со мной объяснил мне, что лучше защищать диссертацию без аспирантуры, что поступление в институт весьма проблематично: экзамены и всё такое прочее... Дух чиновника ЦК партии и здесь витал неумолимо. Более того, оказалось, что Артёмовский учительский институт расформировывают, объединяя со Славянским пединститутом. Ректор Артёмовского института был весьма расположен ко мне и соглашался взять меня в Славянск, но при условии, что я откажусь от аспирантуры. Штат у него ограничен, всех взять не может. Значит, не может мне предоставить карт-бланш. Это было справедливое решение. Но мне-то каково! Я к лету 1951 г. уже был женат. Жена на сносях. Аспирантура — журавль в небе, а пединститут — воробей в руках.

Аспирант Института математики АН Украины

Я принимаю решение: пишу заявление об уходе из института по собственному желанию (имея в виду поступление в аспирантуру), переезжаю в Киев, к матери, сдаю экзамены (это формальность) и жду приговора... В жизни каждого человека бывают такие "звёздные мгновения", когда судьба может круто измениться. В такие моменты очень важно принять правильное решение, базируясь не на сиюминутной выгоде, а думая о своём будущем, о перспективе своего развития. И вот, я — аспирант отдела теории вероятностей Института математики Академии наук Украинской ССР с 1 ноября 1951 г. Мой научный руководитель — мой Учитель — Борис Владимирович Гнеденко. С тех пор вся моя последующая жизнь связана с Институтом математики, менялось только служебное положение.

Выбор темы диссертации. Как я уже упоминал, ещё в Артёмовске я постепенно нащупывал подходы к вычислению распределения статистик Смирнова в явном виде, используя комбинаторные соображения и метод траекторий, для случая кратности объёмов двух выборок. Формулы получились громоздкие, но обозримые. Прежде всего, хотя бы потому, что, переходя к пределу, когда кратность выборок p стремится к бесконечности, легко получается явное выражение для распределения статистики Колмогорова, особенно односторонней. Попытки усовершенствовать метод для случая рационального соотношения объёмов двух выборок вели в дебри необозримых комбинаторных соотношений. Здесь явно просматривался тупиковый путь дальнейших исследований. Впрочем, достижение венгерского математика Иштвана Винце и эстонского Вольдемара Озолса несколько смягчили бесперспективность этого пути. И.Винце, в прошлом, во время войны, служил в стройбатальоне оккупационных войск в Украине, может быть, был в Киеве, быть может, когда-то взгляды его и моей матери скрестились на улицах Киева, быть может, это он сказал ей в 1944 г.: "Не грусти, матка, скоро Ваши придут..." Пришли и ... забрали отца...

Так вот, И.Винце объездил чуть ли не полмира, побывал даже в Аргентине, читал лекции, заработал на виллу в престижном районе Будапешта, на склонах горы Маргет.

Я понимал, что надо искать другой, более перспективный путь анализа, который не зависел бы от прихоти комбинаторных соотношений. Выбор нового метода определили книжка А.Я.Хинчина "Асимптотические методы теории вероятностей" и статья И.И.Гихмана "Об асимптотике в законе больших чисел". С тех пор я считаю этих двух выдающихся учёных своими учителями. Для этого будут в дальнейшем и другие основания.

Чтобы воспользоваться идеями книги А.Я.Хинчина, где рассматривались 1-я и 2-я проблемы диффузии (в терминологии А.Я.Хинчина), надо было иметь исходные интегральные (или разностные) уравнения для рассматриваемых распределений, а в придачу — малый параметр серии. Вот я и начал в аспирантуре у Б.В. с построения уравнений для распределений статистик Смирнова. Так возникла тема диссертации "Точные и асимптотические представления распределений статистик Колмогорова и Смирнова". Впоследствии диссертация называлась "О критериях согласия Колмогорова и Смирнова".

Исключение из комсомола. Памятные события 1951—1953 гг. — очередной сталинской параноидальной кампании борьбы с "врагами народа" сопровождалась не только "разоблачением" выдающихся деятелей советской медицинской науки, но и всеобщим психозом повышенной бдительности. Не обошла эта кампания и меня, так как я был "меченый" (отец осуждён в 1944 г.), и не требовалось больших усилий пригвоздить заодно с врагами и меня, аспиранта Института математики,

секретаря комсомольской организации двух академических институтов. Секретарь парторганизации Института математики, посмотрев мою автобиографию, написанную при поступлении в аспирантуру, не обнаружил в ней "чистосердечного признания" о моём исключении из комсомола в 1944 г., сразу же после ареста отца в Киеве. Я в то время служил в Харьковском училище связи, которое находилось в эвакуации в г. Коканде (Узбекистан). После демобилизации, уже студентом КГУ, в 1949 г. я снова поступил в комсомол по настоятельной рекомендации моего сокурсника, а впоследствии неизменного друга Ю.Л.Далецкого. Правда, при обсуждении моей кандидатуры на собрании Юра чувствовал себя отнюдь не "в своей тарелке", когда выяснилось, что я "меченый". Однако всё закончилось благополучно для всех. И теперь, по призыву партии, а, может быть, и по зову совести, секретарь парторганизации Института математики пишет донос в комитет комсомола Академии Наук. Незабываемые впечатления оставило у меня заседание комитета комсомола, на котором обсуждалась моя судьба. Пикантность ситуации состояла в том, что практически все члены комитета комсомола были моими "друзьями". Я ведь тоже был секретарём! Все ахали и охали, говоря: "Как же так? Почему не признался?" Мои объяснения, что в моём комсомольском деле и в райкоме все сведения о моей комсомольской жизни изложены без утайки, не принимались в расчёт. Все-таки рука их дрогнула. И когда дело дошло до голосования об исключении меня из комсомола (вторично!), голоса разделились примерно поровну. Протокол был отправлен в райком. Мне оставалось только ждать окончательного приговора.

Но должен признаться, что эти события повлияли на меня ошеломляюще. Иногда и сейчас, в шутку, любит мне говорить Анатолий Скороход: "Ты был правове́рным членом". Мои искренние усилия по активному участию в общественной жизни, стремлению к творчеству в математике перечёркивались. В который раз передо мной воздвигалась очередная стена. Всё это происходило ранней весной 1953 г. Я в то время сменил своё спортивное увлечение волейболом на большой теннис. В Академии Наук как раз была организована секция тенниса, которой руководил энергичный, отчаянно рыжий паренёк. Забросив всё — и учёбу, и научную работу, и общественную жизнь, я отдался теннису целиком и полностью. За летний сезон я превратился из новичка в теннисиста 2-го разряда, выиграв соревнования АН среди новичков. Сталин уже умер, но моё дело все еще продолжали изучать в райкоме...

Аспирантура в МГУ. Новое здание МГУ на Ленинских горах

В 1952 г. Б.В.Гнеденко предложили длительную (на два года) командировку в Германскую Демократическую Республику (ГДР) для организации там научных исследований по теории вероятностей и

математической статистике, а заодно и для ориентации учёных-математиков ГДР на Советский Союз.

В связи с этим Б.В. решил отправить нас, своих "трёх витязей", — В.Королюка, А.Скорохода и В.Михалевича — в Москву, в МГУ к А.Н.Колмогорову, который в то время был "един в трех лицах": заведующим кафедрой теории вероятностей, деканом механико-математического факультета и директором Научно-исследовательского института математики МГУ. Конечно же, только декан мог сказать волшебные слова: "Сезам откройся", и перед нами открылись двери нового здания МГУ на Ленинских горах с прекрасным общежитием для аспирантов (отдельные спаренные комнаты с общими на двоих удобствами, с телефоном и пр.), роскошной библиотекой, превосходными аудиториями, практически бесплатной студенческой столовой и пр. Я, вместе с В.Михалевичем, был прикреплен к А.Н.Колмогорову, а научным руководителем А.Скорохода стал Е.Б.Дынкин, выдающийся учёный и педагог. Только семинар И.М.Гельфанда мог соперничать с семинаром, которым руководил Е.Б.Дынкин. А самое главное, мы получили уникальную возможность общаться с выдающимися представителями Московской математической школы, слушать их лекции, посещать семинары, общаться в неофициальной обстановке.

Декан факультета А.Н.Колмогоров был весьма демократичен, ему подражали (или также были естественны) и другие профессора. Конечно, каждый использовал предоставленную ему возможность учёбы в МГУ по-разному. Я, как старший по возрасту, да к тому же имевший опыт армейской службы, был опекуном нашего небольшого коллектива украинских аспирантов, что дало организационный эффект в нашей жизни в МГУ. Однако это уже другая история.

Эмпирический процесс. Учебный 1953/54 год был для меня последним годом аспирантуры. Так что я незамедлительно приступил к реализации алгоритма построения асимптотических разложений для распределений, статистик Колмогорова и Смирнова.

Как известно, нормированный эмпирический процесс сходится при возрастании объёма выборки к броуновскому мосту, т.е. условному броуновскому процессу с фиксированным значением на конце траектории. Уравнение для распределения такого процесса появляется в результате трансформирования и искажения уравнения теплопроводности. А уравнения для последующих членов асимптотики ещё более искажены. Так что вычисления в явном виде членов асимптотики занимают довольно много времени. Существует, впрочем, другой подход, с использованием представления исходной условной плотности распределения в виде отношения двух безусловных плотностей, каждая из которых уже определяется как решение уравнения теплопроводности (при различных, конечно, граничных условиях). Однако в этом случае возникают

дополнительные трудности, связанные с обоснованием деления двух асимптотических разложений. Формально такой путь проще с вычислительной точки зрения, но сложнее в обосновании. С такой необходимостью сохранения разумного соотношения между простотой алгоритма и сложностью его обоснования приходится часто иметь дело в асимптотическом анализе. И проблема его оптимальности вряд ли может быть решена в абстрактном виде.

Не встречая (и не замечая) никаких принципиальных трудностей в асимптотическом анализе распределений статистик Колмогорова и Смирнова, я довольно быстро приближался к завершению диссертационной работы, так что оставалось время и для посещения лекций А.Я.Хинчина, Л.А.Люстерника, А.М.Ляпунова, и др. Я также старался не пропускать семинаров Е.Б.Дынкина, И.М.Гельфанда и др.

На лекциях А.Я.Хинчина, посвящённых теории систем обслуживания, произошла весьма поучительная история.

Теорема Королюка. На одной из последних лекций А.Я.Хинчина по теории систем обслуживания, которую он как раз и развивал в то время, Александр Яковлевич сформулировал и доказал теорему о равенстве интенсивности простейшего регенерирующего потока обратной величине среднего интервала между требованиями (моментами регенерации) при весьма обременительных ограничениях. В заключение А.Я.Хинчин заявил, что это утверждение, должно быть, имеет место без дополнительных ограничений, однако он в данный момент не знает, как это доказать. Придя в общежитие, я попытался найти доказательство теоремы, используя введённые А.Я.Хинчиным порождающие функции. К моему удивлению, результат получился, как говорится, в две строчки. Я был уверен, что столь простое доказательство должно быть известно и А.Я.Хинчину, поэтому не решился показать ему свои расчёты. Семинар закончился, начались новогодние каникулы, потом экзаменационная сессия для студентов. Так что продолжение спецкурса А.Я.Хинчина началось спустя два с лишним месяца. В этом промежутке на одной из вечеринок, которые мы втроём устраивали по разным поводам, а иногда и безо всякого повода, я рассказал своим друзьям об этой теореме Хинчина. Они дружно набросились на меня, требуя, чтобы я немедленно шёл к нему. Подбодрённый дружеской поддержкой, я после одной из лекций показал свои выкладки А.Я.Хинчину. Он с большим интересом взял мои две страницы, сказав, что в последнее время не обращал внимание на эту теорему, так что с интересом посмотрит мой результат. На следующей лекции я был потрясён предложением А.Я.Хинчина. Он сообщил мне, что ход моих соображений верен, что требуется всего лишь слегка уточнить обоснование предложенного доказательства. И в заключение спросил: "Согласен ли я, чтобы он написал совместную со мной заметку в печать с полным доказательством этой теоремы?" Я, конечно, же, согласился и был

безмерно счастлив, воображая себя соавтором научной статьи с самим А.Я.Хинчиным!

Дни шли за днями. Спецкурс Хинчина закончился в апреле 1954 года. А я по настоятельному требованию руководства Института математики АН Украины, а точнее его научного секретаря, должен был возвратиться в Киев для завершения работы по кандидатской диссертации. А.Я.Хинчину я не решился напомнить о его предложении, так что в начале мая 1954 г. я вернулся в Киев. Материал для диссертации у меня был вчерне готов. За десять дней я напечатал, вставил формулы и переплёл три экземпляра кандидатской диссертации "О критериях согласия Колмогорова и Смирнова". Диссертация была представлена Б.В. Гнеденко к защите, что дало повод директору Института математики академику А.Ю.Ишлинскому (выдающийся механик и фантастически интересный человек) зачислить меня в штат на должность младшего научного сотрудника. До окончания аспирантуры оставалось несколько месяцев.

Спустя два года (в 1956 г.) после описываемых здесь событий в "Трудах Математического института им. В.И.Стеклова АН СССР" была напечатана монография А.Я.Хинчина "Теория систем обслуживания", в которой содержался параграф под названием "Теорема Королюка". А.Я.Хинчин не только не забыл о своём предложении, но и преподавал мне урок научной этики, назвав теорему моим именем. В итоге, в моём послужном списке есть научная работа (правда, официально не зарегистрированная), опубликованная соавтором в монографии. Как же мне на неё ссылаться? Конечно, это вопрос риторический. Я никогда не пытался на него ответить в моих библиографиях. А может, надо было? Правда, некоторые из моих коллег считают, что это просто курьёз. Да и я иногда так подумываю. Однако, как говорится, Хинчину виднее.

Защита кандидатской диссертации

Став младшим научным сотрудником Института математики, в мае 1954 г., я с нетерпением ожидал защиты моей кандидатской диссертации. Хорошо известно, что в научной карьере каждого учёного это необходимый шаг для обоснования своей "значимости" в науке. Научная степень кандидата наук открывает перспективы в повышении зарплаты, прежде всего, в повышении должностного положения. Кандидат наук имеет право занимать должность старшего научного сотрудника, или доцента в высшем учебном заведении.

Однако традиционная процедура присвоения учёной степени кандидата наук в бывшем Советском Союзе, да и в настоящее время в независимой Украине, всегда вызывала во мне сомнения в её целесообразности. Уже в самом термине "соискатель учёной степени" слышится нечто заискивающе-просительное. Предварительное необходимое условие защиты диссертации — наличие опубликованных

работ. Но вместо того, чтобы в полном соответствии со здравым смыслом судить по этим работам о претенденте на степень кандидата, по существующим правилам "соискатель" обязан представить машинописную работу объёмом не менее 100 с., которую, как правило, никто не читает, за исключением двух оппонентов и одного рецензента. Да ещё возможна контрольная экспертиза в ВАКе (Высшей аттестационной комиссии). Далее, защита происходит на заседании учёного совета, среди членов которого примерно лишь одна треть (редко половина) являются специалистами в данной области математики, да и среди этих учёных, может быть, один-два близки к пониманию проблем, рассматриваемых в диссертации. Так что публичная защита диссертации — это скорее парадная, форма представления претенденту кандидатской степени. Но итоговое заключение председателя совета, как правило, произносится скороговоркой (к концу заседания все уже устали). Причём и само заключение председателя совета не имеет юридической силы, пока ВАК его не утвердит. Все мы к этому привыкли, а надо бы задуматься: не проще ли представить оппонентам, подлинным специалистам в данной области науки, принимать решение о присуждении учёной степени без обсуждения? А для контроля происходящего ввести единый совет по данной специальности, утверждающий решение оппонентов и объявляющий своё решение претенденту. Вроде бы и похоже на нынешнюю процедуру, да не совсем: "Федот — да не тот!". Единый совет по специальности представляет научное направление. Здесь коррупция означала бы гибель научной школы...

Я думал лишь о том, как воспримут мою работу мои оппоненты А.Н.Колмогоров и И.И.Гихман. Иосиф Ильич представил отзыв почти без замечаний, однако, выразил сомнение в правомерности названия диссертации "О критериях согласия Колмогорова и Смирнова". На, что А.Н.Колмогоров возразил: "Напротив, это вполне соответствует роли непараметрических статистик в анализе статистических данных". Я был счастлив, ведь название диссертации я не вычитал где-то, а придумал сам. Незабываемым для меня было обсуждение диссертации с А.Н.Колмогоровым. Сразу с поезда из Москвы я привёз А.Н.Колмогорова к Б.В.Гнеденко на квартиру. Беседа не состоялась, поскольку А.Н.Колмогоров пожелал отправиться на киевский пляж. Защита была запланирована на 29 июня, разгар лета в Киеве. Я предусмотрительно взял с собой одного из своих близких друзей на подмогу. Только окунувшись в воды Днепра, А.Н.Колмогоров вспомнил о моей диссертации и стал выговаривать мне за многочисленные огрехи, которые, он обнаружил в вагоне, по дороге из Москвы в Киев. На плаву не очень-то удобно соображать. Я, размахивая руками, что-то бормотал в своё оправдание. И здесь произошло совершенно непредвиденное. Тёмные тучи внезапно заволочили небо, приближался дождь, возможно, с грозой. Тогда, в 1954 г.,

ещё не было пешеходного моста, соединяющего город с пляжами на Трухановом острове. Желающих попасть на пляж перевозили на пароходиках, наминавших баржу, они назывались "калоши". С приближением туч мгновенно выстроилась бесконечная очередь на переправу через Днепр. Оставив А.Н.Колмогорова с другом, я проскочил без очереди на очередную "калошу". Первые капли дождя встретили меня на городском берегу Днепра. Пришлось снять парадную чесучовую рубашку, на которой капли дождя оставляли неизгладимый (в прямом и переносном смысле) след. В полуодетом виде я бежал по главной улице Киева, Крещатику, в Институт математики, который в то время находился на площади Калинина (теперь главная площадь Киева — майдан Незалежності).

Прибежав в институт и, напялив измятую в папке, но зато сухую рубаху, я стал лихорадочно писать формулы на доске. Учёный совет начался с опозданием. А.Н.Колмогоров появился измятый, мокрый, но довольный. Сел в первом ряду, и стал писать отзыв на мою диссертацию. У меня почему-то создалось впечатление, что И.И.Гихман был чем-то недоволен. То ли ему не понравилось, что я по собственной инициативе развивал и его идеи в асимптотическом анализе закона больших чисел, то ли он знал нечто о присутствии погранслоя в граничных задачах. Последнее, впрочем, было весьма сомнительным.

На следующий день была осуществлена "художественная" часть праздника защиты диссертации. Мои друзья организовали судёнышко, и мы вместе с А.Н.Колмогоровым поплыли вверх по течению Днепра к устью Десны, где на пустынном пляжном берегу удалось наблюдать полное солнечное затмение. На обратном пути наша утлая посудина начала протекать, так что мы пережили сколько-то довольно неприятных минут, когда вместе с А.Н.Колмогоровым чуть было не утонули на середине Днепра. К счастью, это не произошло, но приключения продолжались и после этого мы чуть не опоздали на поезд в Москву. А.Н.Колмогорова посадили без билета. Начальник поезда, узнав, что А.Н.Колмогоров — академик, пообещал всё организовать в лучшем виде. Сталинское внимание к Академии наук в то время ещё действовало повсеместно. Осенью 1954 г. я стал кандидатом физико-математических наук, а в следующем году был избран на должность старшего научного сотрудника Института математики.

Лаборатория вычислительной математики

После двухлетнего пребывания в ГДР, Б.В.Гнеденко вернулся и стал директором Института математики и академиком-секретарём отделения математики и механики. Уж и не знаю, как Б.В. обратил внимание на захиревшую без научного руководителя акад. С.А.Лебедева лабораторию вычислительной математики (ЛВМ) Института электротехники АН;

может, ему подсказал акад. М.А.Лаврентьев, чья лаборатория кумулятивных зарядов также находилась на территории Феофанийского монастыря под Киевом, как и ЛВМ акад. С.А.Лебедева. Однако факты таковы, что после некоторого периода борьбы с рутинной работой Президиума АН Б.В. добился перевода ЛВМ в Институт математики и сам её возглавил. Понимая, что для возрождения былой творческой атмосферы в ЛВМ необходимо вливание творческих сил, Б.В. решил привлечь к работе в ЛВМ своих ближайших учеников, Е.Л.Рвачёву, В.С.Михалевича, меня, а также проф. Л.А.Калужнина возвратившегося из эмиграции вместе с Б.В. (где он работал в Берлинском университете). Понимая необходимость смены руководства лаборатории, Б.В. после энергичного поиска пригласил В.М.Глушкова (в то время уже профессора, доктора физико-математических наук по алгебре, ученика А.Г.Куроша) переехать в Киев и возглавить лабораторию. В.М.Глушков некоторое время колебался, видимо, побаивался переключаться с абстрактных алгебраических проблем (он получил блестящий результат по 23-й проблеме Гильберта) на прикладные исследования по вычислительной математике, да и перспектива жить за Киевом, в Феофании не обнадеживала. В то время единственным надёжным транспортом был "катафалк" — допотопный автобус, регулярно привозивший на работу и увозивший с работы сотрудников лаборатории. Б.В. уговаривал не только словами. Он предложил В.М.Глушкову свой директорский автомобиль, особняк в Феофании и пообещал квартиру в Киеве. Решающее слово, по-видимому, было за женой Глушкова. Ей очень понравился Киев, а перспектива жить за городом не очень её пугала. Тем более, что одним из условий Глушкова было предоставление ему квартиры в Киеве.

Феофания — земля обетованная

Жизнь лаборатории резко возродилась, инженеры, которых Лебедев оставил в Киеве, с энтузиазмом принялись за разработку схем новых вычислительных машин "Киев", "Днепр" и др. Б.В.Гнеденко вместе с Л.Калужниным организовал семинар в КГУ по теории алгоритмов и алгебре логики для студентов старших курсов. Мне Б.В. предложил читать курс программирования для электронных вычислительных машин (ЭВМ) студентам 5-го курса, чтобы уже через год получить готовых к работе в ЛВМ молодых специалистов.

Б.В. не только подготовил платформу для обучения новых кадров вычислителей-программистов — он организовал наш переезд в Феофанию. В.Михалевича он поселил в новый финский коттедж, правда, в одну (меньшую) комнату, а меня — в бывший особняк, стоявший на холме, над дорогой, правда, урезав мою квартиру, выделив М.Ядренко комнату с отдельным входом. Начался удивительный период феофанийской жизни, период "бури и натиска". В.Глушков вскоре активно

включился в работу лаборатории, определив своё научное направление — теория абстрактных автоматов. Это был весьма удачный выбор. Сохраняя абстрактный уровень рассматриваемых задач и вместе с тем имея в качестве объектов математического анализа вполне конкретные реальные системы — ЭВМ, В.Глушков стал научным лидером ЛВМ. Интерес Президиума АН к нашей тематике заметно возрос.

Вскоре встал вопрос о выделении ЛВМ из Института математики в качестве Вычислительного центра АН Украины. На знаменитой Лысой горе в Киеве развернулось строительство лабораторного корпуса ВЦ и жилого дома для сотрудников. Обладая блестящими организаторскими способностями, владея удивительной логикой убеждения и будучи первоклассным ученым, В.Глушков приобрёл сторонников во всех руководящих сферах, не только Президиума АН, но и в правительстве и ЦК компартии. Теперь Б.В.Гнеденко оказался исторической помехой на ясном пути к успеху В.Глушкова. Логическим следствием был разрыв их дружеских отношений ("старая хлеб-соль забывается").

Адресный язык программирования

Ещё до моего возвращения из Москвы в Киев Б.В.Гнеденко предупредил меня, чтобы я готовился к работе по компьютерной тематике. Я стал посещать лекции А.М.Ляпунова по программированию, Л.А.Люстерника по вычислительной математике, стал штудировать абстрактную теорию алгоритмов, в частности, теорию алгоритмов Маркова.

С самого начала мне показалось естественным объединить два подхода: абстрактную схему алгоритмов Маркова и практическую схему алгоритмов Ляпунова. Получилась схема программирования, которую мы вместе с Л.Калужниным называли "Блок-схема программ". Не доставало одной важной детали — реализации в формальной форме Неймановского (адресного) принципа организации памяти компьютера. На лекциях по автоматизации программирования для студентов КГУ я должен был объяснить, как реализуются вычислительные алгоритмы в одно-, двух- и трёхадресном компьютере. Совершенно естественным шагом было сохранить запись формул в традиционном виде, введя дополнительно машинную алгоритмическую операцию — извлечение числа по адресу ячейки памяти. Неймановский адресный принцип расположения информации в компьютере приобретал алгоритмическое воплощение. Программы алгоритмов освобождались от машинного командного облика. Итак, если a есть код ячейки памяти компьютера, то a есть содержимое в этой ячейке памяти. В алгебраической записи формул мы всегда подразумеваем, что буквы могут быть замещены числами и тогда может быть реализован вычислительный алгоритм, представленный в формульном виде. Может показаться, что адресная операция не нужна

вовсе, так как она априори предусматривается алгебраической записью формулы. Но тогда как будет выглядеть программа рекуррентного процесса, в котором адрес результата не меняется от шага рекурсии? Вот именно!

Кроме того, появилась естественная возможность ввести новую компьютерную операцию: "адрес второго ранга". Так что a означает содержимое ячейки, адрес которой a , есть содержимое адреса a . Теперь циклические (рекуррентные) вычислительные процессы записываются в весьма компактном виде.

В итоге, в новом компьютере "Киев" был введён индекс-регистр, который обеспечивал схемную реализацию циклических, рекуррентных программ. Мне кажется, что это было началом схемной интеллектуализации компьютера. История с развитием адресного языка программирования имела продолжение.

Соавторство с Е.Л.Рвачёвой. Я представил свои соображения на семинаре. Е.Л.Рвачёва одобрила мою находку и с энтузиазмом включилась в развитие адресного языка программирования. Много лет спустя ("старая хлеб-соль забывается"), в преддверии выборов членов-корреспондентов АН Украины, она предъявила претензию: якобы я присвоил себе приоритет в создании адресного языка программирования. Претензия была косвенной, меня к обсуждению проблемы приоритета не привлекали. Я объяснил В.С.Михалевичу, что прекрасно понимаю ситуацию накануне выборов. Е.Л.Рвачёва (Ющенко) заслуживает быть членом академии. А что до приоритета, то Бог нас рассудит. Смотри список опубликованных работ. Правда, и здесь можно найти лазейку. Ведь я мог опубликовать первую статью, не ставя в известность "автора". Но тогда, почему "автор" публикует следующую статью в соавторстве со мной, если считает меня плагиатором?

Я так подробно объясняю этот конфликт, порождённый выборами в академию, для того, чтобы было понятно следующее. Я не считаю важным делом в научном творчестве расстановку акцентов — кто, когда, где, кому и т.д. Важно, что научный результат стал достоянием общественности. Его значимость в значительной мере определяется широтой известности и применяемости. А автор открытия, безусловно, удовлетворён и счастлив, счастлив даже оставаясь безымянным. Правда, остаются вопросы: кого награждаем материально и социально (?).

Первая Всесоюзная конференция по программированию

Жизнь за пределами города в монастырском поместье, хотя и бывшем, имела свои прелести. Мы много времени проводили вместе: работа, рыбалка на живописных феофанийских озёрах, отдых на природе с костром и песнями. Однажды мы устроили грандиозный праздник в июньскую ночь на Ивана Купала. Пригласили гостей из Киева, даже из

Москвы приехал Ю.Прохоров. Игрища завершились под утро. Я повёл утомлённых гостей на прогулку вдоль озёр к радоновому источнику. Каково же было наше удивление, когда мы обнаружили в нём бутылку шампанского с предусмотрительно подготовленными стаканчиками (подарок Купалы)!

Заснув в 6.00 утра, я был разбужен в 8.00. Оказалось, в Институте математики состоится Учёный совет, на котором мне надлежало присутствовать: Ю.Прохоров выступал с докладом. Внезапно почувствовав озноб в своём теле, я вызвал скорую помощь и был помещён в инфекционное клиническое отделение. "Не бывает лихорадки без инфекции" — так решили врачи. А мне через несколько дней предстояла командировка в Баку, на 1-ю Всесоюзную конференцию по программированию, где я мог впервые представить на суд общественности наш адресный язык программирования. Лечащий врач предупредил меня, что раньше, чем через неделю, меня не выпустят. Я стал лихорадочно искать выход. Прежде всего, я сбивал высокую температуру на градуснике до нормальной щелчками. Но этого было недостаточно. Надо было ещё "уломать" лечащего врача. Но как? И тут мне повезло! Одним из врачей клиники, да ещё инфекционного отделения, оказалась подруга моей сестры. Уговорить её не стоило большого труда, и через три дня я оказался на свободе. При выходе из палаты, меня провожали словами: "Даже выписаться из клиники нельзя без блата".

В Баку я оказался единственным представителем из Украины. Лихорадка была физиологической реакцией на переутомление и бессонную ночь, и исчезла сразу после того, как я отоспался в клинике. Мой доклад был последним после обеда, секционным, прошёл абсолютно не замеченным. На банкете я, воспользовавшись предоставленным мне словом от Украины, предложил тост: "За универсальный алгоритмический язык программирования", на что председательствующий, "патриарх" программистов, единственный в Союзе доктор наук по программированию М.Шура-Бура ответил латинской пословицей, которая в переводе на русский язык означала: "Разумный да поймёт". В комментариях к пословице доктор наук объяснил, что в универсальном алгоритмическом языке программирования исчезнут прелестные особенности почерка отдельных программистов. Восприняв намёк латинской пословицы как моё непонимание перспектив развития программирования, и будучи уверенным в неизбежности создания универсального языка программирования, не связанного с конкретными особенностями той или иной вычислительной машины, я решил объяснить Шура-Буре более подробно свою точку зрения. Но меня не пустили к нему соседи по столу, решившие, судя по моему возбуждённому виду, что я намерен отстаивать свои взгляды универсальным способом, то есть, набив оппоненту, как говорят юмористы, "красную морду лица". Уже через несколько месяцев в

Союзе появился универсальный язык программирования "АЛГОЛ-60". М.Шура-Бура стал ярым его пропагандистом.

Учебник по программированию. Накопив изрядный опыт, как в преподавании, так и по практическому применению программирования, а также имея свой собственный, хотя и доморощенный, язык программирования, мы с Е.Ющенко стали подумывать о подготовке учебника по программированию. Б.В.Гнеденко одобрил нашу идею, обещал написать введение и договориться с московским издательством о выпуске книги. Мы разделили работу по главам. Е.Ющенко, как человек очень организованный, взялась за начальные главы. Мне достались заключительные, в которых излагался адресный язык программирования, а затем — способы его применения к описанию программ логических задач. Были даже сделаны попытки формализовать процесс преобразования адресных программ. В дальнейшем это направление превратило практическое программирование в теорию со своими собственными проблемами, особенно связанными с преодолением трудностей в доказательстве эквивалентности различных определений в абстрактном языке. На мой взгляд, учебник выглядел вполне солидно. Материал по программированию был систематизирован в соответствии с тогдашним уровнем развития программирования. Заключительные главы открывали перспективу дальнейшего усовершенствования абстрактного языка программирования. Здесь, как всегда, возникла проблема. Где черпать идеи для дальнейших поисков? Если бы в коллективе инженеров были энергичные молодые люди, можно было бы искать пути совершенствования языка совместно с ними. Это был бы наилучший подход. По-видимому, так развивались языки в других странах, и прежде всего, в Соединённых Штатах Америки. Благодаря взаимному влиянию инженеров и математиков компьютерная отрасль быстро продвигалась к созданию персональных компьютеров с высокоразвитыми языками программирования, а вернее, создавала возможность общения между программистом и компьютером.

В нашем Вычислительном центре АН Украины консерватизм инженеров и увлечение абстрактными проблемами математиков не способствовали подобному пути развития компьютерной техники. Мы пристроились за спиной американских центров и двигались по уже проторенному ими пути. Хотя научного потенциала, энергии молодых сотрудников вполне хватило бы для собственных решений. Многочисленные и разнообразные достижения нынешнего Кибернетического центра — тому доказательство.

Уже отдаляясь от компьютерной техники, я продолжал преподавать в Педагогическом институте. Совместно с Л.Калужниным мы подготовили учебник на украинском языке "Алгоритми і математичні машини". Само название означало, что идеология ЭВМ (электронные вычислительные

машины) должна измениться. Ни электроника, ни техника не являются главными компонентами компьютерной техники. Центральная проблема автоматизации процессов деятельности человека — проблема алгоритмизации, то есть построение адекватных алгоритмов, обеспечивающих реализацию тех или иных процессов. Так это и произошло спустя несколько лет, и остаётся поныне. Разве что тогда алгоритмы ещё не были товаром.

Правда, плату за труд мы, конечно же, получали в виде зарплаты в институте или гонорара за книжку. Более того, в 1958 г. был построен жилой дом на Лысой горе для сотрудников ВЦ, в котором многие получили хорошие квартиры. Накануне, при выделении ВЦ из Института математики нужно было выбирать, где работать. В.Михалевич и Е.Ющенко без колебаний выбрали ВЦ. Я же к тому времени был всецело занят проблемой построения погранслоёв в асимптотическом анализе граничных задач для случайных блужданий. Так что, без колебаний, я предпочёл остаться в ИМ. В итоге я, хоть и въехал в новый дом, получил всего лишь две комнаты в "коммуналке": в трёхкомнатной квартире, с соседом, сотрудником Института экономики. Это была моя первая настоящая городская квартира в Киеве, откуда я был мобилизован в 1941 г., где мне было по закону положено предоставление жилья после возвращения из армии в 1947 г. Только однажды у меня возникла мысль потребовать квартиру у государства, когда я посетил наше жильё в доме-замке на Андреевском спуске, расположенном чуть ниже всемирно знаменитой Андреевской церкви, где прошли мои детство и отрочество. Дом уже был отселён на капитальный ремонт. В нашей большой комнате уже не было окна в потолке, как до войны. Я представил себе полковника госбезопасности, который, по слухам, жил в этой квартире (быть может, он и настоял на осуждении отца?). Мелькнула мысль: а почему, собственно, не попытаться получить то, что мне положено как участнику войны? Но эта волна схлынула как только я покинул отчий дом. Воспоминания прошлого — весьма капризное явление. Они неожиданно, непредсказуемо появляются и так же внезапно исчезают — иногда надолго, иногда навсегда.

А новый дом, заселённый накануне нового 1959 г., сиял ёлочными огнями, шумел предновогодней суетой. Я прошёлся по дому: посмотреть, кто из старых знакомых как устроился. В одном из парадных повстречал новичков-инженеров, которых В.Глушков пригласил из России для расширения и углубления тематики ВЦ. Я привёл их к себе в квартиру, не ахти как меблированную, но с накрытым праздничным столом и новогодней ёлкой. Мы весело встретили Новый, 1959 год. И в дальнейшем наши дружеские отношения сохранились. Жизнь в новом доме на Лысой горе была не вполне городской. Рядом находилось здание ВЦ, в котором работало большинство жильцов, а в двух шагах от дома — Голосеевский

лес. Так что мы часто организовывали спортивные и дружеские пикники в лесу. А когда появились свои автомобили, стали выезжать в Кончу-Заспу, дачное предместье Киева. А то и дальше — на речку Рось, и даже в Одессу, на майские праздники.

Журнал "Теория вероятностей и её приложения"

По-видимому, ещё в 1954 г. по инициативе А.Н.Колмогорова, было принято решение о создании нового журнала "Теория вероятностей и её приложения", что соответствовало положению теории вероятностей в науке. Название подразумевало два замечательные качества: абстрактное (аксиоматическое) построение теории и естественно-научную (эмпирическую) интерпретацию основных понятий и результатов. Достаточно сравнить эмпирическое и естественно-научное определение статистического эксперимента, чтобы понять близость статистических выводов к реальным практическим проблемам. Впрочем, существует и иная, так сказать, скептическая точка зрения, согласно которой в реальной действительности не существует статистических экспериментов, а значит, применения теории вероятностей на практике не обоснованы.

Я, однако уверен, что природа наделила реальные процессы статистическими свойствами. Так что абстрактные модели стохастических систем вполне адекватно (в прикладном смысле) отражают реальное поведение процессов природы.

Принятие решения было всего лишь первым шагом к созданию журнала. Предстояла унылая бюрократическая волокита — многоступенчатое и тщательное расследование целесообразности введения нового печатного органа, журнала. Конечно, авторитет всемирно известного учёного Н.Колмогорова обеспечивал существенную поддержку в процессе создания журнала. Но требовался энергичный, настойчивый "ходок по инстанциям". Выбор А.Н.Колмогорова пал на меня. С его стороны я всегда ощущал откровенно благожелательное ко мне отношение, начиная с первых дней нашего знакомства весной 1951 г. в Киеве, а затем во время пребывания в аспирантуре МГУ. Он также приглашал нас троих к себе на дачу в Комаровку: лыжная прогулка, довольно продолжительная, обед, музыкальная пауза, научная беседа. И в заключение, что нас поразило, проводил на железнодорожную станцию. А.Н.Колмогоров устраивал для нас (меня, А.Скорохода, В.Михалевича) приёмы у себя дома, на квартире в МГУ. Однажды он организовал лыжную прогулку в Подмосковье. Мы с ним проехали на машине примерно за 30 км от Москвы. В.Михалевич приехал туда поездом. Оттуда мы стартовали на лыжах в Москву, в МГУ. Это был суровый поход, в условиях сильного мороза с ветром. Мёрзнувшего Михалевича спас от неприятных последствий мой шарф.

В течение всего времени моего пребывания в МГУ А.Н.Колмогоров постоянно интересовался моей творческой работой, всегда был в курсе моих построений асимптотических разложений для распределений статистик Колмогорова и Смирнова. Жаль, очень жаль, что он не заглянул глубже в эту проблему, а лишь "намекал" на сложность граничных условий. Однако об этом после.

Итак, я был наделён полномочиями "заместителя главного редактора журнала" для оформления всех необходимых документов, разрешавших новое издание. А.Н.Колмогорова не смутили трудности, связанные с тем, что я уже работаю в Институте математики АН Украины и живу в Киеве, а издательство журнала расположено в Москве. "Что ж, будете ездить в Москву столько раз, сколько потребуется в интересах журнала", — так сказал А.Н.Колмогоров. Конечно, это был мой "звёздный час". Я имел все основания для переезда в Москву и работы с А.Н.Колмогоровым на факультете в МГУ или в Институте математики АН. Однако я тогда совершенно не задумывался о такой перспективе. Работать вместе со своим Учителем Б.В.Гнеденко было для меня очевидной данностью.

Имя А.Н.Колмогорова сыграло решающую роль: журнал "Теория вероятностей и её применения" был разрешён к изданию, и со второй половины 1956 г. стали регулярно выходить четыре выпуска в год. Я столь же регулярно посещал Москву. Конечно, так долго продолжаться не могло. Вероятностный коллектив в Москве был весьма внушителен и на кафедре в МГУ, и в Институте математики, и в других институтах Москвы. Так что претендентов на должность заместителя главного редактора хватало с избытком. В 1958 г. эту должность занял Ю.В.Прохоров, что было вполне естественным. Я до сих пор до конца не понимаю, почему А.Н.Колмогоров поручил создавать журнал именно мне? Мне кажется, что и мои московские коллеги и друзья также не могут этого объяснить. Иначе, от чего бы им не пригласить меня на празднование 40-летнего юбилея журнала? А ведь не пригласили! Более того, и в список учеников А.Н.Колмогорова не включили. Формально они, может быть, и правы. Но есть же и научные, и этические критерии понятия связи учитель-ученик. А.Н.Колмогоров был моим оппонентом по диссертации кандидатской в 1954 г. Да и после защиты докторской диссертации мы часто встречались с А.Н.Колмогоровым — в Киеве у Б.В.Гнеденко, на конференциях в Вильнюсе, Тбилиси, Бакуриани и т.д. А.Н.Колмогоров всегда проявлял ко мне искреннюю симпатию. Помню лыжные прогулки и беседы в Бакуриани, нашу неожиданную встречу в Будапеште (Венгрия), куда я был приглашен Венгерским математическим обществом им. Бойяи, а А.Н.Колмогоров получал очередную медаль АН Венгрии. Не забывается и ужас, охвативший меня при встрече с больным А.Н.Колмогоровым, — его могучий ум ещё был жив, а тело уже почти утратило связь с внешним миром. Мой сын Дмитрий, художник по

призванию, нарисовал портрет А.Н.Колмогорова в тот период. А.Н.Колмогоров терпеливо позировал. Вспоминается эпизод с защитой докторской диссертации Г. Климовым. А.Н.Колмогоров был решительно против представления диссертации, в которой обосновывался фидуциальный подход Р.Фишера к статистике. Я же, будучи учёным секретарём Совета по защите диссертаций Института математики АН Украины, способствовал защите Г. Климовым диссертации в нашем совете. Спустя некоторое время, А.Н.Колмогоров, будучи в Киеве, на прогулке вдоль Днепра, спросил меня, кто помог Г. Климову защититься. Я объяснил мотивы моей помощи: Г. Климову удалось, по моему мнению, вложить в идею Р. Фишера корректно сформулированную алгебраическую проблему, что и было для меня решающим при принятии его диссертации к защите в нашем совете. А.Н.Колмогоров не стал возражать. И А.Н.Колмогорова, и А.Я.Хинчин я считаю моими неформальными учителями, хотя бы потому, что я в меру своих способностей продолжал их исследования, используя развитые ими методы.

Защита докторской диссертации

При выборе темы кандидатской диссертации я воспользовался тем, что эмпирический процесс можно описать, используя пуассоновский процесс. Так что распределение статистики Колмогорова сводится к изучению условного распределения максимума пуассоновского процесса. Аналогично, распределение статистики Смирнова можно свести к условному распределению максимальных отклонений в схеме Бернулли, т.е. для суммы независимых случайных величин принимающих только два значения.

Естественным обобщением постановки задач моей кандидатской диссертации стало изучение максимальных отклонений для сумм независимых случайных величин, и для пуассоновского процесса. Но теперь уже безусловных распределений. Снятие условности распределений существенно расширило круг задач. Так возникла тема докторской диссертации "Асимптотический анализ в граничных задачах случайных блужданий", защищенной 22 июня 1963 г. в совете по защитах Института Математики. Моими оппонентами были Б.В.Гнеденко, И.И.Гихман и М.И.Вишик (профессор московского университета).

И снова, как и в кандидатской диссертации, следуя идеям А.Я.Хинчина и И.И.Гихмана, я использую в асимптотическом анализе разностные (для сумм) и дифференциальные (для пуассоновского процесса) уравнения для искомых распределений. Существенным моментом постановки задач являлось введение малого параметра серии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$), который обеспечивал возможность построения алгоритмов для определения членов асимптотического разложения, теперь уже двух типов: регулярных членов и погранслоев.

Задолго до защиты докторской диссертации я выступал на семинаре у М.Г.Крейна в Одессе, чтобы рассказать об интегральном погранслое. Думаю, что каждый претендент на докторскую степень должен заранее обсуждать свои результаты не только на конференциях, но и на семинарах, в которых принимают участие его потенциальные оппоненты, т.е. ученые знающие досконально предмет обсуждения.

Понятен выбор оппонентов. И.И.Гихман научил меня строить регулярные члены асимптотики, а М.И.Вишик (и Л.А.Люстерник) научили меня строить члены асимптотики типа погранслоя (см. "Погранслои"), Б.В.Гнеденко дал мне путевку в науку. По случайному стечению обстоятельств, в том же 1963 году и в том же месяце июне, происходила математическая школа в Каневе, где собрались математики со всего Советского Союза, был там и мой будущий оппонент М.И.Вишик. Моя задача состояла в том, чтобы, во-первых, добыть его отзыв на диссертацию и, во-вторых, доставить М.И.Вишика в Киев на заседание Совета по защитах. День проходит за днем, а Марк Иосифович не пишет отзыва на мою диссертацию...

Наконец на борту теплохода происходит "историческая встреча" М.И.Вишика и М.Г.Крейна. Марк Иосифович спрашивает Марка Григорьевича: "Кто придумал интегральный погранслой?" М.Г.Крейн, не задумываясь, отвечает "В.С.Королюк". Так проблема отзыва на диссертацию была решена. М.И.Вишик тут же отправился в свою каюту писать отзыв на мою докторскую диссертацию.

Оставалась проблема доставки оппонента из Канева в Киев. Здесь я был предусмотрителен. В городе Черкассы, откуда стартовали ракеты в Киев, заходя в Канев, дежурил мой ученик, покупая каждый день билет до Киева для М.И.Вишика.

Получив отзыв, я отправился в Киев для подготовки защиты диссертации.

Выборы в Академию наук Украины 1967 г.

Мы сидели за столом в ресторане "Театральный", как раз напротив здания АН, где традиционно проходит заключительный тур голосования по кандидатурам, получившим "проходной бал" на выборах в отделениях. Нас было трое претендентов на учёное звание члена-корреспондента АН Украины: заведующий отделом Института кибернетики В.С.Михалевич, заведующий отделом Института математики А.В.Скороход и я, заместитель директора Института математики, зав. отделом В.С.Королюк. Трое друзей на два вакантных места. Мы были веселы и возбуждены предстоящим событием, зная (почти наверняка), что скоро будет объявлено утверждение общим собранием АН результатов выборов по отделениям. С нами были наши ближайшие "болельщики".

Мы договорились, что радостное известие принесёт нам И.И.Гихман, который тогда уже был членом-корреспондентом АН, избранным по Донецкому филиалу АН, созданному несколько лет тому назад. Трудно передать настроение человека, знающего о предстоящем существенном сдвиге в его жизни, сдвиге, означающем признание научных и общественных заслуг в жизни АН Украины, а также существенное изменение и официального, и материального положения. Членство в АН давало право занимать бессрочно должность заведующего отделом, а также дополнительный доход в виде академической пенсии, соизмеримой с оплатой должности младшего научного сотрудника. Существовали и другие привилегии, которыми можно было пользоваться по своему усмотрению. Например, специальная поликлиника 4-го управления Минздрава, к которой прикрепляли "уважаемых людей" членов АН, чиновников ЦК партии и правительства (помельче), заслуженных деятелей и т.д.

Мы были молоды, и выборы для нас представлялись захватывающим соревнованием, в котором очень хотелось победить. А победа достанется тому, кто наберёт больше голосов членов Отделения АН, да ещё с превышением барьера в 2/3 участвовавших в голосовании. Формально процедура выборов была весьма простой. Академик-секретарь Отделения зачитывал краткие послужные списки претендентов в алфавитном порядке, сообщал о результатах обсуждения в конкурсной комиссии, недвусмысленно намекал на позицию Президента АН, а также мимоходом "расставлял акценты" на кандидатурах. Последний нюанс означал, что Академик-секретарь "напоминал" членам Отделения о предварительных договорённостях, состоявшихся в кулуарах сессии. Этот "управляющий" акт Академика-секретаря играл весьма существенную, а то и решающую роль. Совсем непросто объединить намерения членов Отделения, хаотически распределённые между претендентами. Эту предварительную работу осуществлял Академик-секретарь, опираясь на уже сложившееся накануне голосования мнение членов конкурсной комиссии. Думаю, что наш Академик-секретарь Отделения механики, математики и кибернетики (в 1967 г.), Ю.А.Митропольский не имел себе равных в АН по способности без лишних хлопот реализовать предварительно согласованные с Президентом АН и с отделом науки ЦК партии результаты выборов. Внешне все происходило весьма и весьма демократично: тайное голосование независимых членов Отделения. На самом деле всё (или почти всё) было предусмотрено (просчитано, продумано) заранее. Попытки действительно независимых членов Отделения типа Ю.Березанского или В.Марченко обсуждать подлинные научные достоинства кандидатов выглядели гротескно и, конечно же, рассеивались в настойчивых предложениях председателя собрания - Академика-секретаря. Разумеется, не исключались случайные, то есть

непредвиденные заранее ситуации, которые могли бы коренным образом изменить результаты голосования. А на то и Академик-секретарь, чтобы не допускать таких случайных всплесков эмоций и умело направлять корабль Отделения с 20—30 гребцами, загребаящими без общей команды, к заранее определённой гавани. Однажды в жизни мне пришлось управлять за рулём лодкой, движимой двумя гребцами, моими школьными товарищами. Это было 14 июня 1941 г. В тот день мы окончили школу-десятилетку, получили аттестаты и поехали на Киевские пляжи, кататься на гребной лодке. Опаздывая на проводы отца в Брест-Литовск, где рядом, в деревне жил его престарелый (90 лет) отец, я пытался удвоить усилие гребцов. Мне это не удалось. Пришлось самому сесть и грести обеими руками, — так было скорее. Я всё-таки опоздал на проводы отца... Так и не увидел его больше никогда. Это очень больно!

Конечно же, во время наших выборов мы не думали о том, что являлись фишками на доске, и передвигали нас видные игроки. За спиной В.Михалевича был В.Глушков, а за моей спиной — Б.В.Гнеденко, приехавший из Москвы, но не умевший "сколотить команду". Существенным моментом выборов было моё положение заместителя директора Института математики при Ю.Митропольском, он же — Академик-секретарь отделения. Казалось бы, "моё дело в шляпе". Ан нет! Ю.Митропольскому "невыгодно" было, чтобы я стал членом-корреспондентом. Я оставался не достаточно "объезженным мустангом". Кстати, с возрастом я не утратил способности "выкинуть фортель" (видимо, сказывается казацкая кровь моих предков), так что и сам собой не всегда могу управлять. Ю.Митропольский стал уговаривать меня не торопиться с выборами, пусть А.Скороход пройдёт, за Вами не пропадёт. А может, дух чиновника ЦК и здесь витал незримо? В итоге первые два места достались моим друзьям, В.Михалевичу и А.Скороходу, а я почему-то, несмотря на усилия Ю.Митропольского, получил проходной балл без места. Мне хочется думать, что здесь решающую роль сыграл "тандем" (несыгранный!) Б.Гнеденко и В.Глушкова. Виктор Михайлович всегда благоволил ко мне. Это подтвердили последующие выборы в действительные члены, а Б.В.Гнеденко, безусловно, активно был заинтересован в моих выборах. К моему счастью, Президент АН расщедрился на дополнительное место, так что ко времени голосования на общем собрании мы были уже равноправными претендентами. Как и следовало ожидать, И.И.Гихман принёс нам радостное известие в ресторан, столы были сдвинуты и пошёл пир горой. А потом был традиционный банкет на 150 персон, на котором три бывшие аспиранта Б.В.Гнеденка были почётными хозяевами в ранге членов-корреспондентов АН Украины. Это было весной 1967 г., спустя всего четыре года после защиты докторской диссертации, и два года — после присвоении учёного звания профессора по специальности "теория вероятностей и

математическая статистика". Да и возраст был подходящий для новых свершений — 42 года. Сразу после выборов, в 1968 г., был заселён новый дом АН в 12 этажей, напротив оперного театра, ужасающей архитектуры, но с просторными квартирами. Мы все трое получили по 4-х комнатной квартире: я — на 10-м этаже, А.Скороход — на 12-м, а В.Михалевич — на 6-м, друг над другом. Наконец-то я вернулся в Киев по-настоящему. Но и эта квартира не была последней. То ли членство в АН сопряжено с неким поветрием, то ли возраст сыграл с нами в кости, но один за другим мы покинули институтский дом на улице Владимирской, сменив наших жён.

Выборы в академики

Следующие выборы — в действительные члены АН Украины, — оказались, куда более сложными. Только лишь в 1976 г. нам со Скороходом представилась возможность участвовать в выборах. Мы уже обзавелись новыми семьями. Квартирные условия были не ахти какими, да и жёны оказались не без тщеславия — требовали от нас не останавливаться на достигнутом. Пришлось ехать в Москву и просить академиков А.Н.Колмогорова и Н.Н.Боголюбова написать нам обоим поддержку на всего одно вакантное место. К тому времени А.Скороход тоже оказался "меченым", подписав в 1968 г. знаменитое письмо-призыв к гласности политических судебных процессов, которое незамедлительно опубликовали за рубежом. А это означало усиленное внимание к "подписантам" со стороны недреманного ока КГБ и, как правило, неприятные последствия "различной степени тяжести".

Существенным дополнением к процедуре выборов членов АН было предварительное заседание подгруппы членов отделения. Я не упоминал об этом на выборах в члены-корреспонденты, так как нас это не касалось. Мы просто об этом не подозревали. Теперь же я был членом партии (с 1964 г.) и сам принимал участие в таких заседаниях. Так вот, на заседании подгруппы "правоверный" академик, ректор Днепропетровского университета, выступил с воинствующим категорическим заявлением против кандидатуры А.Скорохода в академики. Никто ему не возражал. Думаю, его заявление было решающим в голосовании. Во втором туре я получил на один голос больше чем А.Скороход. Эту весть мне радостно сообщил возбуждённый В.Глушков. Однако голосование отделения не являлось решающим. К тому времени были внесены поправки в Устав АН, позволявшие АН СССР контролировать выборы в республиканских АН. Претендента надлежало одобрить тайным голосованием соответствующего Отделения АН СССР. Я же такого одобрения не получил. На выборах в 1976 г. был ещё один претендент — Н.П.Корнейчук, ученик академика С.М. Никольского, очень влиятельного члена Отделения математики АН СССР, — который и добился провала моей кандидатуры в Москве в пользу Н. Корнейчука. Правда, у

Ю.Митропольского имеется своя версия, весьма правдоподобная. Злую шутку сыграло сходство наших фамилий. Голосующие могли перепутать, за кого они хотели бы голосовать. Пусть даже так, но от этого мне легче не стало. Предстояло получить, причём немедленно, поддержку моей кандидатуры Президиума АН СССР. Через два дня состоится общее собрание АН Украины. Поздним вечером в кабинете Ю.Митропольского сочувствующие: В.Глушков, Ю.Ишлинский и В.Михалевич. Моя жена Нина принесла бутерброды и организовала чай, что очень понравилось Ю.Ишлинскому — всегдашнему почитателю красивых женщин. Мой друг, Володя Михалевич, был в азартном состоянии. По телефону Ю.Митропольский договорился с вице-президентом М.А.Лаврентьевым, нашим украинским академиком и в прошлом также вице-президентом АН Украины, о поддержке. Надо было ехать в Москву и привести соответствующую бумагу. Не заезжая домой, В.Михалевич отправился на вокзал. Через день, накануне выборов, бумага о поддержке моей кандидатуры на звание академика АН Украины за подписью М.А.Лаврентьева была на столе у нашего президента. Несколько дней, предшествовавших выборам, сами выборы и проблема поддержки настолько эмоционально воздействовали на меня, что результаты выборов на общем собрании я узнал по телефону, находясь в постели дома. Мы с женой немедленно поехали в Институт математики, где мой бессменный партнёр по работе заместителем И.А.Луковский организовал праздничный стол. Мои ученики из Туркмении привезли из своего общежития плов. Праздник удался на славу. Но и зарубки на моей душе ... появились новые.

Теперь предстояло организовать выборы А.Скорохода. Выбрав подходящий момент, я отправился к президенту АН на приём и выложил на стол стопку монографий А.Скорохода, в том числе, конечно, знаменитые, совместные с Гихманом, три тома "Случайных процессов". На мой вопрос: "Почему не выбираем Скорохода в академики?" Б. Патон ответил вопросом: "А почему вы не выбираете в академики М.Крейна?". Я не был застигнут врасплох этим вопросом. Ещё будучи студентом, а затем аспирантом, я задавал этот вопрос и декану механико-математического факультета, и директору Института математики. И всегда получал неопределённый ответ. Однажды мне объяснили, что сразу после войны М.Крейн вернулся из эвакуации и был охотно принят в институт математики, но... без своих одесских учеников. Это его не устраивало, и он навсегда остался жить и работать в Одессе, правда, не в университете, а в Институте инженеров водного транспорта. Но зато со своими учениками, с дачей на берегу моря и пр. Думаю, что М.Крейн был эстет и в математике, и в жизни. Этими качествами я всегда восторгался.

Случайно в беседе с Б.Патоном возник вопрос о моём прошлом. Он был весьма удивлён, что меня с такой биографией в ЦК позволили избрать членом АН. Видимо, у двух ведущих ведомств, ЦК партии и КГБ,

произошёл сбой в информации. В конечном итоге любой, даже очень серьёзный, вопрос решается на чиновничьем уровне. Главное, чтобы вопрос был "тщательно подготовлен". А компетентность исполнителей играет довольно второстепенную роль.

На ближайших выборах в АН была выделена вакансия академика по Отделению математики, и А.Скороход был без проблем избран на эту вакансию. Правда, на выборах меня поразило поведение двух членов Отделения, один из которых опустил в урну нетронутый бюллетень, что означало безразличие к результатам голосования, а другой оставил в списке претендентов только одну фамилию, но не А.Скорохода, а своего друга. Более полугода Ю.Березанский со мной не здоровался. Однако с приближением сроков следующих выборов он сменил гнев на милость и получил мою поддержку на очередных выборах после А.Скорохода.

Было бы любопытно проанализировать список членов АН с точки зрения очередности выборов. Мне кажется, что рано или поздно, но талантливый учёный в Украине становится членом АН. Разумеется, в семье не без урода, бывает, что и посредственности проникают в состав АН и даже становятся её активными деятелями. Но это, как говорится, "издержки производства". В нашем отделении математики, по-моему, невозможно указать на ошибочность выборов. Хотя и не все достойные кандидаты избираются, а тем более вовремя. Надо вводить возрастной ценз, да боязно. Старость не признаёт поражений.

Между двумя юбилеями (с перестройкой)

Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, но спокойно продолжающего развивать "чистую математику" в соответствии с внутренней логикой ее развития.

А.Н. Колмогоров

20 лет между двумя юбилеями: 60 и 80, 1985 и 2005. Происходили они в двух разных державах: в УССР и в "незалежній Україні".

60 лет праздновал в советском санатории "Украина" в Гаграх, на берегу Черного моря. Из газеты "Известия" узнал, что награжден "Орденом Дружбы народов". И это было заслужено. Только в Туркмении у меня среди учеников 6 кандидатов наук. А лекции читал почти во всех Советских республиках. И оппонировал диссертации (кандидатские и докторские) по всему Советскому Союзу. При отделении математики Академии наук была Комиссия по теории вероятностей и математической

статистике, которая должна была организовывать защиты докторских диссертаций на основе всестороннего обсуждения научных достоинств работ соискателей. Я был членом этой Комиссии, и с уверенностью могу сказать: многим помог преодолеть "порог сомнения" среди членов комиссии. Жаль, нет у меня списка оппонированных докторских диссертаций. Интересно было бы его проанализировать. Особенно интересно проследить за дальнейшей судьбой защитившегося доктора: оставил ли он заметный след в науке после защиты докторской диссертации?

А конференции, школы, семинары по теории вероятностей во всех уголках Советского Союза. Незабываемые праздники общения с друзьями и коллегами и молодежью. Особенно приятно вспомнить Вильнюсскую международную конференцию и ее руководителя Витаса Статулявичюса. Замечательны воспоминания о школах в Бакуриани (в Грузии): зимой, с лыжными катаниями. И в Украине мы не были пассивны. Математические школы в Кацивели (в Крыму), созданные по инициативе Ю.А. Митропольского, были значимым местом встреч вероятностников. Да и Карпаты, и Западную Украину мы привлекали для организации школ и семинаров, сочетая обсуждение научных результатов с замечательным отдыхом в условиях благословенной природы Карпат.

Все ушло в процессе перестройки! Даже моя общественная роль резко изменилась. С 1966 года я был заместителем директора Института математики по научной работе. В 1988 году Ю.А.Митропольский срочно попросил меня уйти в отставку, прислав гонца в пансионат "Феофания", где, готовясь заняться исследованием устойчивости стохастических систем в схеме усреднения, я проводил часть отпуска. 1988 год, 63 года, пенсионный возраст. Пора подумать о собственном благополучии. В научной тематике — неисчерпаемый источник результатов, — теория случайных эволюций в схемах усреднения и диффузионной аппроксимации. Надежный партнер, ученик Анатолий Свищук, защитивший докторскую диссертацию в 1992 году. Еще один активно работающий (даже можно сказать самозабвенно), Юра Боровских со своей тематикой по теории U -статистик, близкой мне по духу, и не только как объект исследования, но и по методам асимптотического анализа. Благодаря моему покровительству Ю.Боровских защитил докторскую диссертацию у нас в Институте. Более того, я помог ему устроиться на работу в Ленинграде (!). Наконец-то, мое увлечение проблемой устойчивости вполне утешало мое самоуважение: придумал задачу, которой пока никто не занимался (в том числе и мой друг Женя Царьков из Черновцов).

Правда, оказалось, что такая задача уже исследовалась в работе Папаниколау и K^0 (1978). Но работы здесь много и на всех хватит. Тем более, что у нас есть "фирменное блюдо": фазовое укрупнение состояний,

которое приводит к усредненным стохастическим системам, не обязательно детерминированным, как в стандартной схеме усреднения.

А еще была увлекательная тематика: полумарковские случайные блуждания. Вот по этой тематике мои аспиранты из Туркмении (Б.Пирджанов, Б.Пирлиев) и из Узбекистана (Л.Драпкин, М.Музрапов) защитили кандидатские диссертации.

Замечательным объектом в теории полумарковских случайных блужданий была парная система интегральных уравнений на полуоси. Решение в общем виде неизвестно, как сказал мне специалист Ю.И.Черский, ученик С.Г.Михлина. Однако в частных случаях, представляющих интерес для теории вероятностей система поддается анализу. Более того, удастся из явных решений методом факторизации получить асимптотические результаты, существенно более обозримые, чем хоть и точные, но громоздкие выражения. Была даже защищена докторская диссертация Б.Пирджановым. К сожалению, написана она была без должной математической культуры, что и привело к отклонению ее ВАКом.

Я уверен, сами результаты вполне соответствуют требованиям докторской диссертации.

В сфере моего внимания появилась еще одна проблема: анализ восстанавливаемых резервированных систем.

Во-первых, Б.В.Гнеденко опубликовал работу по этой теме в журнале "Техническая кибернетика" (1964 г.), а во вторых, по-видимому, в Грузии мне подарили авторы свою работу на эту тему (Цициашвили и K^0 , 1982). Мне показалось, что резервированные системы вписываются в схемы стохастических систем в виде случайных эволюций.

Следует, забегаая вперед, отметить, что начитавшись книги Жакода и Ширяева, я сумел пристроить общие предельные теоремы для семимартингалов к анализу случайных эволюций, в частности, к анализу импульсных процессов с марковскими переключениями.

Итак, старт взят. А сегодня пора подводить итоги. Но сначала о внешних факторах. До перестройки я ездил за рубеж только "близкий" и только "в сопровождении" (делегации, представителя КГБ и т.п.). Даже персональные приглашения, как это было в 1981 г. в Бельгию и в 1986 году в Японию, не производили должного действия на Власть советов. Более того, даже ближнее зарубежье было мне "заказано", если выезжать вместе с женой. Характерный эпизод 1985 года. Математическая школа в Болгарии (Варна). Я — один из основных лекторов (тема: Полумарковские случайные эволюции — фазовое укрупнение и приложения). Мой ученик, И.Пенев (из Софии) защитил кандидатскую диссертацию и пригласил мою жену на это же время (сентябрь) в Софию на 2 недели. Приезжаю в Москву для оформления документов и совместной (в делегации!) поездки в Варну, и узнаю в международном

отделе Президиума Академии Наук о том, что мои документы не в порядке, мой выезд под вопросом. Супруга из Киева сообщает, что под давлением "органов" ректор консерватории отзывает ее из отпуска. Грозятся снять её с поезда, если она проигнорирует "советы органов". Я в Москве настаиваю на том, чтобы меня отправили в Болгарию, а жене советую игнорировать "угрозы" и ехать в Софию.

Моя твердая позиция сработала. Меня отправляют самолетом, но не в Варну, а в Бургас (200 км южнее), без денег, в воскресенье. Прилетев в три часа утра, я к пяти был в Доме творчества Академии наук. И мы с Ниной провели чудесные две недели на берегу Черного моря под Варной. Жаль только, что наша стеснительность не позволила воспользоваться любезным предложением Александра Юльевича Ишлинского принять у него в дар болгарские деньги на наши развлечения. Он прекрасно понимал, чего нам недостает в этом благословенном Богом месте у моря.

Перестройка набирала ход, связи между КГБ республик слабели. Наконец, в 1990 году (65 лет от роду!) меня выпускают в капиталистическую страну Швецию на конференцию в составе делегации, конечно. Там я познакомился с удивительным профессором Г.Кулдорфом из Умеа-Университета, члена международной общественной организации ISI, весьма влиятельной среди вероятностников мира. Мне удалось убедить его, что я смогу прочесть спецкурс "Стохастические модели систем", доступный для студентов 4-5 курсов Умеа-Университета английским и математическим языками. Кулдорф несколько раз повторял: так 4 часа в неделю, 4 недели, всего 16 часов. Я подтверждал условия. Впервые в моей жизни (можно сказать - новой жизни, так как прошедшая ушла безвозвратно вместе с советской системой), я получил приглашение на 1 месяц с женой в Швецию (Умеа-Университет). 1991 год, февраль-месяц, мы провели с Ниной в Умеа (500 км севернее Стокгольма). Была замечательная зима со снегом, рядом с домом (около 300 метров) — парк с расчищенной лыжней. Мы становились на лыжи прямо у порога нашего дома и шли на прогулку по лесной размеченной тропе со светильниками в ночное время, которое наступало сразу после шестнадцати часов.

Я прочел спецкурс, Дима Сильвестров (тоже убедивший Кулдорфа в своих способностях лектора) принял экзамен и засвидетельствовал, что студенты многое поняли и усвоили.

С тех пор начались мои путешествия по зарубежным странам.

1993 год Испания: Барселона, Автономный университет, , 6 месяцев, с летним перерывом и 2 месяца в Италии: Рим, университет Тор-Вергата (по приглашению Л.Аккарди).

Вот тогда я несколько ускорил события. Понимая, что оставляю отдел на 8 месяцев, я решил передать отдел своему весьма талантливому ученику Анатолию Турбину, с которым мы создали теорию фазового укрупнения стохастических систем.

Это был, конечно, джентльменский поступок, но недальновидный. С перестройкой А.Турбин перешел на питание алкоголем, что в итоге привело меня к решению — закрыть отдел теории вероятностей в Институте, созданный в 1949 году Б.В.Гнеденко и руководимый мною с 1960 по 1993 год.

Вскоре, но по другой причине, был закрыт в 1986 году еще один вероятностный отдел — Теории надежности стохастических систем, созданный по моей инициативе под эгидой научного совета по надежности при Президиуме Академии наук.

Руководил отделом Г.П.Буцан, ученик А.В.Скорохода. Во время перестройки он увлекся (и не без успеха) бизнесом. Так что его научная деятельность стала эфемерной. Так в период перестройки в Институте формально существенно уменьшился научный потенциал по теории вероятностей, люди же не были сокращены. Остался лишь отдел случайных процессов, созданный в 1964 году для А.В.Скорохода. Однако и А.Скорохода унесло течением перестройки в Соединенные Штаты Америки, где он пребывает и сейчас, пользуясь заслуженным уважением американских (и не только) ученых, избравших его членом Американской Академии Искусств и Наук.

Знаковым событием в моей зарубежной жизни было приглашение меня с пленарным докладом, с оплатой всех расходов за счет оргкомитета конференции MMR'97, в сентябре 1997 года в Бухарест (Румыния). Инициатива исходила от одного из влиятельных членов оргкомитета, моего старого знакомого по Болгарской математической школе Михаила Никулина (из Санкт-Петербурга) и заведующего кафедрой университета в Бордо (Франция) Николасом Лимниусом (NL). Михаил Никулин объяснил NL, что В.Корольюк может влить живую струю в его исследования по теории полумарковских процессов с приложениями в теории надежности и статистике. Доклад я заказал на тему "Stochastic Models of Systems in reliability problems". Кроме того, будучи накануне весной в Канаде, я предложил построить диффузионную аппроксимацию в схеме марковской восстанавливаемой системы, существенно уточняющую предыдущие результаты, полученные ранее с моей аспиранткой Л.Ваврикович.

Результаты я представил на конференции в Бухаресте в виде совместного доклада В.С.Корольюка, В.В.Корольюка и Н.Держко (профессор университета в Торонто).

Знакомство с NL состоялось и мы с ним договорились о моем приглашении в следующем году на такую же конференцию в Компьене, посвященную "Semi-Markov Models and Applications". Так получилось, что NL пригласил меня сразу на две конференции: одна в начале октября 1998 года, а другая, по техническим приложениям вероятностных моделей, в начале декабря этого же года в чудесном французском городке Сенлис близ Компьеня. За два месяца общения с NL мы обсудили наше

дальнейшее сотрудничество. Я настоял на том, чтобы следующее приглашение было на длительный срок, например, на полгода. И в декабре 1999 года мы с женой приехали в Компьень на шесть месяцев. Поселились в International Residence, в большой просторной комнате на первом этаже со стеклянной дверью, выходящей на лужайку. А мы были с нашей любимой собакой Лотти-Леда. Как раз в тот период, начитавшись книги Жакода и Ширяева, я предложил NL исследовать асимптотическое поведение импульсных процессов с марковскими переключениями в схеме усреднения, используя семимартингальное представление таких процессов и применяя предельные теоремы для семимартингалов. Применение общих теорем сходимости семимартингалов было нетривиально, поскольку предсказуемые характеристики сами были случайными эволюциями, анализ которых опирался на теорию сингулярного возмущения приводимо обратимых операторов, развитой в наших совместных с А.Турбиным работах. Статья была в конце 2000 года отправлена в журнал "Теория вероятностей и ее приложения" в Москву. И тогда начались загадочные явления. Статья то появлялась в нашей переписке с редакцией, то исчезала надолго. Неожиданным подарком к юбилею я считаю публикацию этой статьи в журнал "Теория вероятности и ее применения" т.49, вып.4, с. 1-18, 2004 год. Большинство членов редакции мои старые знакомые, правда они забыли меня пригласить на 40-летний юбилей журнала, при том, что я принимал деятельное участие в создании журнала по просьбе А.Н.Колмогорова, и в самом начале был зам.главного редактора (!). "Старая хлеб-соль забывается" — так учит народная мудрость.

Я обязан сотрудничеству с NL также тем, что нам вместе удалось развить алгоритмы усреднения, диффузионной и пуассоновской аппроксимации с полумарковскими переключениями, основанные на асимптотическом анализе "компенсирующего оператора" (КО) расширенного процесса марковского восстановления, введенного в работах М.Свириденко, аспирантки А.Д.Вентцеля, в 1982 — 98 гг.

По существу КО - это производящий оператор вложенной цепи Маркова в полумарковскую случайную эволюцию, нормированный математическим ожиданием времен пребывания в состояниях ПМП. Благодаря такой нормировке в асимптотическом представлении КО в качестве главного члена появляется производящий оператор "сопутствующего" марковского процесса, имеющего те же переходные вероятности вложенной цепи Маркова, что и полумарковский процесс, а интенсивности состояний равны обратным величинам средних времен пребывания в состояниях ПМП.

Расставаясь с NL в начале июля 2000 года, я уговорил его написать книгу "Stochastic System in Merging Phase Space". За прошедшее время книга приобрела зримые очертания: содержание состоит из 8 глав и

Appendix'es. К юбилею мы должны сдать рукопись в World Scientific Publishers.

Наблюдая в каких муках рождается книга, NL при последней нашей встрече в апреле 2004, заявил: "Неблагодарный это труд — писать монографии. Лучше писать много статей". Он, конечно, прав. Но ведь книга пишется не только для престижа. Еще должно быть внутреннее желание самовыражения. Впрочем, любопытно было бы обсудить эту проблему за "круглым столом".

Не поддаваясь искушению обсуждать сейчас итоги моего участия в написании монографий в период "между двумя юбилеями" — это тринадцать монографий, из них пять на английском языке, плюс "Справочник по теории вероятностей и математической статистике" (изданный дважды на русском языке, в издательстве Наукова думка, Киев, 1978 г. и "Наука", Москва, 1985 г., а также переведенный дважды на французский (1983 г.) и испанский языки (1981 г.)), завершим сначала мою "Одиссею".

Итак, начиная с осени 1998 года, я регулярно езжу во Францию, в Компьень, где сотрудничаю с профессором Н.Лимниусом. Кроме того, по инициативе Юрия Кондратьева в 2001 году был организован грант (Deutsche Forschung Gemeinschaft (DFG)) для Н.Працьовытого и Г.Торбина (учеников А.Турбина) по теме "Фрактальные распределения (и другие объекты)". Я согласился быть руководителем темы. А спустя два года, мы с Н.Братийчуком организовали такой же грант DFG по теме "Математические модели процессов экономического риска" (2003-2004). И теперь я два раза в году: весной, март-апрель, и осенью, октябрь-ноябрь, провожу в Германии в Бонне и в Биелефельде — всего 2-3 месяца в году. Здесь я регулярно докладываю свои результаты по асимптотическому анализу полумарковских случайных блужданий. А в период своего осеннего в 2004 г. пребывания в Бонне и Биелефельде я, по собственной инициативе и при заинтересованности Ю.Кондратьева, рассказываю диффузионную аппроксимацию процессов с локально независимыми приращениями с эквилибриумом.

Весна 2005 г. (март-апрель) будет тяжелой. Мы с NL должны завершить работу над книгой. Возможна также моя осенняя поездка в Германию: или как руководителя гранта вместе с Н.Працьовытым, или нашего с М.Братийчуком гранта, если будет его продолжение на 2005 год.

Разумеется, в творчестве остановиться невозможно! Но путешествовать по свету - сложное физическое и моральное испытание!

Кроме того, последнее десятилетие между двумя юбилеями (1995-2005 гг.) было достаточно богато на международные конференции, в которых я принимал активное участие в качестве председателя оргкомитета.

1995,-97,-99 гг.— Украинско-Скандинавские конференции по теории вероятностей и математической статистике (Ужгород, Умеа, Киев).

1998 г. — Коллоквиум по теории вероятностей и математической статистике, посвященный памяти И.И.Гихмана (80 лет) (г.Донецк).

2001 г. — Конференция по стохастическому анализу и приложениям, посвященная А.В.Скороходу (70 лет) (г. Львов).

2002 г. — Конференция, посвященная памяти Б.В.Гнеденко (90 лет) (г.Киев).

Особо хочется упомянуть последний в Советском Союзе Советско-Японский симпозиум в 1992 году, в Киеве, в Феофании. Делегация японских ученых во главе с Фукушимой была приятно поражена нашим гостеприимством, о чем свидетельствует тот факт, что члены японской делегации вернули нам остаток денег, хотя им предстояло еще путешествие в Москву. Кроме того, четверо наших членов оргкомитета были приглашены в Японию на конференцию с полным обеспечением за счет японской стороны.

Теперь вернемся к анализу научных публикаций за 1985—2005 года. Прежде всего, обсудим монографии.

1. "Стохастические модели систем", Киев, Наукова думка, 1989 г.

Эта книга возникла как итог моих лекций для студентов старших курсов в виде спецкурсов по кафедре теории вероятностей и математической статистики Киевского университета. Хотелось в доступной форме проследить, как строится математическая модель стохастической системы, прежде всего, марковская; какой математический аппарат задействован в анализе таких моделей, какие существуют возможности асимптотического анализа, основанные на развитом нами с А.Турбиным методе сингулярного возмущения приводимо обратимых операторов. Громоздкость метода, изложенного в докторской диссертации А.Турбина, не была оправданной. В монографии я стремился максимально упростить и систематизировать алгоритмы решения проблемы сингулярного возмущения, примененные в анализе марковских моделей стохастических систем. По-моему, мне это удалось.

Однако материал накапливался, и, естественно, возникла потребность расширить книгу. Так возникла новая книга "Стохастичні моделі систем", Київ, Либідь, 1993. (на украинском языке: Украина стала "не залежною" от исчезнувшего Советского Союза).

В это же время, под влиянием книги В.В.Анисимова и Е.А.Лебедева "Стохастические сети и их приложения", Киев, Лыбидь, 1992 г., я с увлечением занялся проблемой диффузионной аппроксимации марковских моделей стохастических систем, будучи уверенным в том, что существует адекватный класс марковских процессов, описывающих такие системы, а

значит, существует возможность "операторного подхода" в анализе таких моделей. Так появилась работа III - 196 (1993 г.), доложенная на конференции в Регенсбурге (Германия).

Вместе с этим, естественно возникла необходимость существенно дополнить содержание предыдущих двух монографий алгоритмами диффузионной аппроксимации.

Контакты В.В.Королюка с консультантом издательства Kluwer Academic Publishers М.Хазевинкелем позволили заключить договор на издание монографии "Stochastic Models of Systems" (третьей в серии). Благодаря поразительным безответственным качествам переводчицы и компьютерного набора Оксаны Адаменко, издание монографии затянулось на 6 лет(!). И только в 1998 г., когда я был во Франции, мне удалось сдвинуть проблему с мертвой точки, и монография была издана в 1999 году.

Сейчас у меня накопилось достаточно много разнообразных алгоритмов асимптотического анализа марковских (и полумарковских) моделей стохастических систем, которые следовало бы изложить в отдельной монографии. К сожалению, на данном этапе нет времен. А, главное, нет попутчиков. А жаль!!!

2. "Полумарковские случайные эволюции", Киев, Наукова думка, 1992 г. (Соавтор А.Свищук).

Эта монография была естественным результатом нашего научного сотрудничества с моим учеником А.В.Свищуком, которого я научил применять метод сингулярного возмущения в асимптотическом анализе случайных эволюций, переключаемых полумарковскими процессами. То, что монография с А.Турбиным 1-12 (1993) была опубликована позже, объясняется тем же, что и публикация "Stochastic Models of Systems" в 1999 году. По традиции, сложившейся в теории полумарковских случайных эволюций, основным объектом изучения были уравнения марковского восстановления (УМВ) для функционалов, и их преобразования Лапласа. Именно, в преобразовании Лапласа уравнения допускали асимптотическое разложение, в котором применим был метод сингулярного возмущения. А потом надо было применять обратное преобразование Лапласа, что существенно усложняло обоснование алгоритмов усреднения и диффузионной аппроксимации. Мы со А.Свищуком перешли на анализ вложенного процесса марковского восстановления (ВПМВ). На этом пути применять преобразование Лапласа не требуется. Однако появляется (естественно!) дополнительное препятствие: переход от ВПМВ к процессу с непрерывным временем. Эти трудности можно преодолевать по-разному. Имея уже достаточно дружеские отношения с М.Хазевинкелем (издательство Kluwer), мы договорились о переводе монографии 1-3 (1978) на английский язык. Теперь за дело взялся А.Свищук, и перевод появился в срок, в 1995 году

(1-17). В это же время энергичный Анатолий Свищук связался с представителем издательства CRC Press (USA) в Москве и договорился о новой монографии. "Evolution of System in Random Media" 1-18 (1995), которую мы написали, пользуясь новым подходом к ВПМВ. Впоследствии появилась приятная для нас рецензия Марка Пинского, известного специалиста по теории случайных эволюций, что свидетельствовало о правильности выбранного нами пути.

В заключение, для полноты, следует упомянуть о последней монографии, написанной нами со А.Свищуком 1-21 (2000), которую я задумывал как справочник алгоритмов асимптотического анализа случайных эволюций. Однако Свищук, озабоченный изданием собственной такой монографии сложил в кучу то да се... И получилось, конечно, ни то, ни се. Тем более, что я уже давно отрекся от старого подхода в анализе полумарковских случайных эволюций, и овладел более эффективным методом с использованием "компенсирующего оператора" (*КО*) ПМСЭ, введенного в работах М.Свириденко и Д.Вентцеля. Как раз сейчас мы с Н.Лимниусом завершаем работу над монографией, в которой метод *КО* будет применяться последовательно во всех схемах аппроксимации усреднения, диффузионной и пуассоновской.

Наконец, имеется еще одна серия из 6 монографий, в соавторстве с Юрой Боровских (ученик Ю.В.Линника по Ленинградскому отделению математического института им.А.Стеклова). В этих монографиях мое участие было разным. В монографии "Теория U-статистик", Киев, Наукова Думка, 1989 г., моя задача была сдерживать аналитический напор Ю.Боровских, и, по мере возможности, сохранить обзримость и упорядоченность результатов. Если знать Ю.Боровских - одержимого аналитическими преобразованиями и, к тому же, не желающего ничего выбрасывать, то мой труд в подготовке монографии 1-10 (1989) был героическим. Я думаю, что согласие издательства Kluwer на перевод книги — это тоже следствие моих усилий. Предыдущая монография "Мартингальная аппроксимация" 1 - 8 (1988), полностью вписывается в наши общие с Ю.Боровских научные интересы. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что первая глава описывает метод асимптотического анализа распределений статистик Колмогорова и Смирнова в моей докторской диссертации.

Когда же возник вопрос о переводе этой монографии на английский язык (1-19, 1997), я к тому времени уже активно использовал семимартингальную технику. Так что в английском варианте появилась глава, в которой в предельно простой форме изложена идеология семимартингального описания стохастических процессов. Эту главу я переписывал не менее пяти раз, и думаю, что добился желаемого результата: понимание сути, не загроможденной фундаментальными деталями. И, наконец, третья монография, — совместная с Ю.Боровских,

"Случайные перманенты", 1-14 (1993). По дороге в Умеа, в свое первое путешествие в капстрану, в 1991 году, мы с женой остановились в гостинице Академии наук на ул.Халтурина в Ленинграде, в роскошном номере — квартире из трех комнат. Юра Боровских был нашим постоянным гостем. В одной из бесед он затронул вопрос о возможности представления симметрических статистик в виде перманентов проекционных матриц. Я с энтузиазмом поддержал его идею, и мы начали развивать ее, опираясь на формулу для производящей функции перманентов. Уже через два года материала было достаточно, чтобы писать монографию. И здесь я снова проявил твердость в отборе материала. В итоге, книга оказалась небольшой (136 стр.), но зато цельной. Благодаря упорству и настойчивости Ю.Боровских она была издана в поразительно короткий срок. Кстати, в монографии 1 - 19 (1997), семимартингальная теория используется при доказательстве сходимости "экспоненциальных статистик". К моему небольшому огорчению, смешанному с удовлетворением F.Avram (1987) нашел простое доказательство сходимости решений уравнения Долеана-Доде вместе со сходимостью процессов приращений. Я как раз занимался этой задачей в связи с интерпретацией экспоненциальных статистик в задачах финансовой математики.

Необходимо упомянуть также монографию 1-12. 1993 г., совместную с А.Турбиным, которая является переводом на английский язык монографии "Математические основы фазового укрупнения сложных систем", Киев, Наукова думка, 1978 г.

По существу, это — докторская диссертация А.Турбина с моим вступительным словом.

И последнее, я с удовольствием вспоминаю то время, когда мы вчетвером: Я, Анатолий Скороход, Анатолий Турбин и Николай Портенко работали над "Справочником". Главный итог: мы сделали "Справочник" и он разлетелся по миру на испанском и французском языках и он полезен для всех, интересующихся теорией вероятностей и математической статистикой.

Далее, я ограничусь перечислением научных проблем, которые меня занимали в период между двумя юбилеями, и краткой характеристикой основных увлечений.

1. Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций — неисчерпаемый источник новых результатов. Надеюсь на издание монографии "Stochastic Systems in Merging Phase Space" (соавтор N.Limnios).

2. Полумарковские случайные эволюции в пуассоновской схеме аппроксимации.

3. Диффузионная аппроксимация стохастических систем с эквilibриумом.

4. Процессы марковского восстановления в задачах теории систем обслуживания и теории надежности.

5. Схема диффузионной аппроксимации систем обслуживания.

6. Полумарковские случайные блуждания.

7. Теория устойчивости стохастических систем.

8. Стохастические полиномы Кравчука.

9. Стохастические системы с постоянной регрессией (R.Coad).

Кроме того, я курирую научную деятельность моего давнего ученика Ярослава Чабанюка (Львівська політехніка) в области процессов стохастической аппроксимации (ПСА) с марковскими и полумарковскими переключениями.

Моя любимая жена, Нина Андрос, профессор Киевской Консерватории, а ныне писательница-сказочница, любит напоминать мне: "Вы, математики, никогда не интересуетесь результатами своих коллег, только своими собственными". Конечно, это слишком категорично, но, в основном, справедливо. Все начинается с аспирантуры. Когда учитель поставил задачу, интерес к творчеству коллег исчезает почти полностью. Весь творческий энтузиазм уходит на преодоление собственных проблем творчества.

А потом наступает адаптация к равнодушному отношению к творчеству коллег. Я не могу назвать ни одного своего ученика, который бы интересовался моим творчеством вне области его интересов.

Как говорится, о других - умолчим. Именно по этой причине, указанной выше, я решил выступить сам с анализом направлений моих исследований.

1. *Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций.*
Можно считать, что в наших с А.Свищуком монографиях проблема построения и обоснования алгоритмов усреднения и диффузионной аппроксимации изложена достаточно полно. Однако мне не нравились следующие обстоятельства: 1) использование в асимптотическом анализе преобразований Лапласа уравнений марковского восстановления (УМВ); 2) опосредованное построение алгоритмов: сначала для вложенного процесса марковского восстановления (ВПМВ), затем для того же скачкообразного процесса с непрерывным временем, и только потом — применение суперпозиции ВПМВ и считающего процесса скачков, дает окончательный результат. Это законный, вполне обоснованный путь, которым пользуются, например, В.В.Анисимов и Д.С.Сильвестров. Однако, для марковских случайных эволюций (МСЭ) удастся избежать применения вложенного процесса, благодаря тому, что парный объект, — случайная эволюция и переключающий марковский процесс, можно

описать производящим оператором, который по удивительному стечению обстоятельств, является суммой генератора переключающего марковского процесса (МП) и генератора случайной эволюции при фиксированном состоянии МП. Этот замечательный факт и использован мною в монографиях "Стохастические модели систем".

Случайно, я обратил внимание на одну из кратких заметок М.Свириденко в журнале "Теория вероятностей и ее применения" (№3, 1989), в которой изучается проблема сходимости полумарковских процессов (ПМП) в схеме серий. Ссылки в заметке вели к депонированным в Реферативном журнале рукописям. Я предложил А.Свищуку раздобыть эти рукописи для изучения на нашем семинаре. Он, к сожалению, проигнорировал мое предложение, считая, что "от добра добра не ищут". Трудно сказать, сколько лет прошло, может 3, а может и 6, прежде, чем я, все-таки, добыл 4 депонированных работы М.Свириденко. В них я нашел определение "полукомпенсирующего оператора" процесса марковского восстановления (ПМВ) (конечно, предложенного научным руководителем А.Д.Вентцелем). Этот оператор отличается от оператора переходных вероятностей ПМВ только множителем интенсивностей пребывания в состояниях ПМП, равных обратной величине математических ожиданий времен пребывания в состояниях.

Этот замечательный множитель позволяет в асимптотическом анализе ПМСЭ использовать "сопровождающий" (!) МП с той же ВЦМ, что и ПМП. Эту идеологию мы используем в нашей с Н.Лимниусом книге, что обеспечивает сравнительно равноправное исследование как марковских, так и полумарковских случайных эволюций. Суть нашего подхода состоит в том, что для данной случайной эволюции со стохастическими переключениями надо построить компенсирующий (или порождающий) оператор; затем представить его в асимптотически сингулярной форме (в схеме усреднения: $\varepsilon^{-1}Q + Q_1$; в схеме диффузионной аппроксимации: $\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1 + Q_2$), затем решить проблему сингулярного возмущения для "усеченного" оператора, и наконец, полученный "усредненный" оператор и будет определять предельный марковский процесс для исходной случайной эволюции в схеме серий.

2. Здесь уместно перейти к следующей проблеме: ***пуассоновской аппроксимации случайных эволюций.***

Начитавшись книги Ж.Жакода и А.Ширяева "Предельные теоремы для случайных процессов", Москва, Наука, 1987, я естественно пришел к задаче анализа процесса приращений с марковскими переключениями, и со случайными слагаемыми (а не детерминированной функцией от вложенной цепи Маркова) с применением семимартингальной характеристики процесса приращений. Тогда предсказуемая характеристика будет уже суммой детерминированной функции

(математического ожидания случайных слагаемых при фиксированном значении ВЦМ). Так что для предсказуемой характеристики уже применимы теоремы усреднения (и конечно, диффузионной аппроксимации). Но тогда можно, в качестве предельного результата для исходного семимартингала получить пуассоновский процесс с предсказуемой характеристикой $\lambda(t)$ — детерминированная функция - результат усреднения предсказуемой характеристики семимартингала. Первоначальный вариант работы, выполненной в Компьене, я показал NL. Он сначала не оценил результат. Но потом согласился присоединиться к авторству и представить ее на конференции в Японии, в Киото (III - 227, 2003). Так возникла возможность серии работ, в которых для случайных эволюций предлагается схема пуассоновской аппроксимации (III - 229, 231, 233, 2004). К сожалению, в редакциях некоторых журналов, предлагаемые работы оказались не понятыми, то ли в силу внешней громоздкости, то ли по причине громоздкости доказательства.

Особенно хочу отметить работу III - 233, 2004, опубликованную в "моем родном журнале" Теория вероятностей и ее применения, т.49, №4, 1-18, поступившую в редакцию журнала в декабре 2000 года! Мне любопытно, кто же читал эту статью в Москве?

3. Наибольшее удовлетворение я получил от исследований *полумарковских случайных блужданий в схеме серий*.

К проблеме изучения ПМСБ я пришел исподволь, пытаясь расширить область применения метода потенциала, изложенного в моей книге [1-1,1975].

Вполне естественным оказалось описание функционирования системы обслуживания типа $M|G|1|_{\infty}$ при помощи полумарковского процесса, построенного на суперпозиции Пуассоновского процесса, описывающего поток входящих требований, и процесса восстановления, описывающего моменты окончания обслуживания требований. Очевидно, что времена восстановления имеют распределение времен обслуживания.

Полумарковская модель системы $M|G|1|_{\infty}$ стала предметом исследования в кандидатской диссертации моего первого ученика из Средней Азии Мохаммеда Хусанова. Вложенный процесс обслуживания в моменты окончания обслуживания задается случайным блужданием со скачками $\theta_k = \nu(\alpha_k) - 1$, где $P(\alpha_k \leq t) = G(t)$, а $\nu(t)$, $t \geq 0$, - считающий процесс Пуассона с параметром интенсивности λ входного потока требований. Таким образом, процесс обслуживания в системе $M|G|1|_{\infty}$ описывается дискретным полумарковским случайным блужданием со скачками θ_k , $k \geq 1$, и отражающим экраном в нуле.

Заметим, что

$$P(\theta_k = -1) = P(\zeta > \alpha) = g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(dt).$$

Итак, полунепрерывным случайным блужданием полностью описывается вложенный процесс обслуживания в моменты окончания обслуживания.

Можно аналогично, описать вложенный процесс обслуживания в системе $G| M | 1 | \infty$, рассматривая его в моменты поступления требований. Полунепрерывное случайное блуждание задается последовательностью случайных величин $\Theta_k = 1 - v(a_k)$, $k \geq 1$, где a_k , $k \geq 1$ — интервал между поступлением требований $P(a_k \leq t) = G(t)$. ВПО v_n , $n \geq 0$, с отражением в нуле образует цепь Маркова, переходные вероятности которых легко считаются в терминах преобразования Лапласа

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(dt)$$

и его производных. Эта задача стала предметом кандидатской диссертации Т.Бутко (украинки, работающей в Ташкенте). По семейным обстоятельствам диссертация не была защищена. В нашей совместной статье приведено явное аналитическое выражение для производящей функции τ_N^k момента достижения длиной очереди заданного уровня N с использованием, разумеется, резольвенты полунепрерывного дискретного блуждания, а также изучено предельное поведение при $N \rightarrow \infty$ распределения τ_N^k для всех трех различных значениях "среднего сноса" $p = E\Theta_k$: $p > 0$, $p < 0$, $p = 0$.

Особенность метода потенциала здесь проявляется в том, что при изучении математического ожидания функционала работает потенциал, а для преобразования Лапласа распределения используется резольвента. Так что полученные результаты могут быть сравнены для проверки наличия ошибок в вычислениях. Асимптотику среднего можно получить двумя путями: непосредственно с использованием потенциала и в виде следствия из асимптотики распределения, где используется резольвента. В анализе системы $G| M | 1 | \infty$ методом потенциала мне представляется любопытным простое аналитическое выражение для производящей функции момента достижения уровня в виде отношения двух частичных сумм значений резольвенты. Здесь проявляется особенность непрерывного (без перескока) достижения положительного уровня.

Естественно, возникает обобщающая задача: *исследовать произвольное полунепрерывное случайное блуждание на суперпозиции Пуассоновского и произвольного процесса восстановления*. Эта задача стала предметом кандидатской диссертации следующего ученика из Средней Азии Б.Пирлиева.

Более того, возникает соблазн исследовать полунепрерывное (и даже произвольное) случайное блуждание на суперпозиции двух независимых произвольных процессов восстановления. Эта задача стала темой докторской диссертации моего ученика из Туркмении Б.Пирджанова.

Здесь, впервые появляется система парных интегральных уравнений типа свертки на полуоси. Непосредственное применение метода Винера-Хопфа, существенно развитого М.Г.Крейном, не удастся. После консультаций со специалистом Ю.Черским оказалось, что один из его учеников реализовал специальный прием, который позволяет получить явные асимптотические выражения для двойных преобразований (Лапласа по времени и Фурье по пространству) для искомых решений в терминах проекционных операторов для преобразований Фурье. Удивительно, что громоздкие формулы, благодаря сведению к вложенному полумарковскому случайному блужданию поддаются асимптотическому анализу. И снова, как в моей прошлой книжке, возникает предельная теорема в трех ипостасях: снос к поглощающему экрану, к отражающему экрану и нулевой.

К сожалению, Н.Братийчук не смог помочь малограмотному математику Б.Пирджанову написать пристойную докторскую диссертацию. Она была защищена в совете Института Математики и отвергнута ВАКом, по справедливому (но слишком резкому) отзыву "черного" оппонента. Думаю, он не смог понять всю красоту аналитики парной системы интегральных уравнений на полуоси. Для этого надо было иметь минимальный опыт работы с такими уравнениями.

Меня все время смущает тот факт, что в ПМСБ участвует ВЦМ с заданным стационарным распределением. Все выглядело так, как и в схеме фазового укрупнения. Только не было возмущения переключающего ПМП. И все-таки, мне хотелось сблизить два разных направления моих исследований: теорию фазового укрупнения, а впоследствии, теория усреднения случайных эволюций и схему полумарковских случайных блужданий. Я очертил своему ученику из Узбекистана Л.Драбкину идею, как попытаться построить асимптотический анализ ПМСБ в схеме серий. Вскоре Л.Драбкин прислал мне огромной длины бумажные простыни густо исписанные формулами, в которых, как будто, моя идея реализовалась. Не имея возможности (и терпения) изучать формулы Л.Драбкина я самостоятельно построил асимптотическое решение данной системы интегральных уравнений для преобразования Лапласа момента достижения нулевого уровня при наличии отражающего экрана на уровне $T = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Задача свелась к решению проблемы сингулярного возмущения для производящего оператора ВЦМ. Все просчитывается до конца в предположении сноса к поглощающему экрану.

Учитывая, что эта задача была поставлена для Л.Драбкина и его друга С.Музрапова, я опубликовал заметку в Докл. НАН Украины, 1995 г., №1, с. 22-29, совместно с ними.

Оставались еще две ситуации: нулевой снос и положительный снос к отражающему экрану. При подготовке обзорного доклада по ПМСБ для второй скандинавско-украинской конференции по математической

статистике (Швеция, 1997 г.). Я без особого труда реализовал асимптотическую схему в случае нулевого сноса, получив задачу сингулярного возмущения второго порядка, как и следовало ожидать, в случае диффузионной аппроксимации. Этот результат опубликован [III - 208, 1997].

4. Случайные блуждания в схеме пуассоновской аппроксимации.

А как же быть с наиболее интересной схемой положительного сноса к отражающему экрану, когда возникает стационарное распределение. Эта загадочная проблема мне казалась "синей птицей". Я многократно пытался что-либо понять, но безуспешно. В итоге, я смирился с мыслью, что это моя "заветная проблема". Суть сложности состояла в том, что в двух предыдущих схемах, введение малого параметра серии не было серьезной проблемой: надо было нормировать скачки малым параметром серии и все! А в стационарной схеме желательно иметь предельным сложный пуассоновский процесс с детерминированным сносом, для которого разработан метод потенциала. Тривиальная нормировка скачков не подходит.

И здесь я должен вернуться к началу 2000 года. Когда мы с Ниной приехали во Францию в Компьень на полгода по приглашению Н.Лимниуса. В промежутке между двумя поездками во Францию (осень 1998 г. - зима 2000 г.) я искал алгоритм диффузионной аппроксимации при отсутствии условия баланса. Такой алгоритм был описан А.Свищуком и опубликован в нашей книге, однако подход Анатолия меня не устраивал. Я понимал, что проблемы сингулярного возмущения должны содержать и такой алгоритм. Где-то в середине сентября 1999 года мне удалось такой алгоритм построить. Я описал его в общих чертах и отправил Н.Лимниусу доводить работу до печатной кондиции. Так вот, когда я приехал в Компьень в начале декабря 1999 года Н.Лимниус все еще приводил этот алгоритм к виду, удобному для публикации. Я решил не вмешиваться в эту канитель, и занялся изучением следующей проблемы: в чем разница в асимптотическом анализе процессов приращений (т.е. сумм), когда слагаемые представлены в виде детерминированной, либо случайной функции от переключающей вложенной цепи Маркова? В первом случае алгоритм усреднения и диффузионной аппроксимации действует непосредственно при заданном асимптотическом представлении производящего оператора двухкомпонентного процесса. А во втором случае вмешивается математическое ожидание по распределению случайных слагаемых при фиксированном значении вложенной цепи Маркова. Но когда, можно предположить (хотя бы для общности), что распределение слагаемых зависит от параметра серии? При этом естественно возникает вопрос, как эта зависимость может повлиять на схему усреднения. Вспоминая результаты В.Анисимова, в которых он изучал асимптотическое поведение сумм индикаторов случайных событий

на цепи Маркова, я пришел к заключению, что в асимптотическом анализе сумм случайных величин на цепи Маркова, при дополнительных условиях, должен появиться пуассоновский процесс в качестве предельного. Остается только найти подходящую форму условий "пуассоновской аппроксимации". Такая форма условий уже существовала в общих предельных теоремах для случайных процессов. Основная идея общих предельных теорем для семимартингалов состоит в том, что условия сходимости семимартингалов формулируются в терминах их предсказуемых характеристик. Так возникла идея рассматривать процессы со случайными приращениями (при фиксированном значении ВЦМ) как семимартингалы, строить для них предсказуемые характеристики, доказывать сходимость этих характеристик к предельным характеристикам, задающим предельный процесс для исходных процессов приращения. В отличие от общих предельных теорем, в которых сходимость предсказуемых характеристик является исходным условием сходимости семимартингалов, в нашей схеме с марковскими переключениями предсказуемые характеристики процессов случайных приращений сами являются аддитивными функционалами на ВЦМ. Так что сходимость предсказуемых характеристик сама является асимптотической задачей, которая, правда, уже решена в схемах усреднения и диффузионной аппроксимации. Однако в схеме пуассоновской аппроксимации задача оставалась нерешенной. После нескольких дискуссий с Н.Лимниусом, который, вначале не придавал особого значения открытой мною области асимптотического анализа, мы пришли к выводу, что схема пуассоновской аппроксимации ничуть не менее интересна (особенно с прикладной точки зрения), чем схемы усреднения и диффузионной аппроксимации.

Тем более, что наша схема представляет собой нетривиальное расширение сферы действия общих предельных теорем для случайных процессов, изложенных в сложной, но все-таки доступной (после многократных возвращений вспять при чтении) монографии Ж.Жакода и А.Ширяева.

Так возникла серия работ, которая и в настоящее время еще не завершена, особенно в схеме полумарковских переключений.

А теперь давайте сравним: я умею строить алгоритм пуассоновской аппроксимации для процессов случайных приращений с полумарковскими переключениями, а моя "заветная задача" как раз и состоит в том, чтобы найти схему асимптотического анализа, которая для процесса приращений на эргодической цепи Маркова давала в пределе пуассоновский процесс со сносом. Хотел бы я быть умным сегодня, как мое воображение завтра. Удивительно, но факт, такое сравнение мне пришло в голову в поезде по дороге в Кишинев, 13 октября, примерно около 21 часа, когда исчерпались остатки терпения (мы выехали из Киева в 10⁰⁰) и хотелось поскорее

доехать до Кишинева Я завернулся в одеяло (в вагоне было чертовски холодно) и чтобы быстрее скоротать время, стал думать о "безнадежной" задаче.

А что если в рассматриваемой разности двух сумм, в одной из них ввести малый параметр серии ε так, как это мы с Н.Лимниусом делаем в схеме пуассоновской аппроксимации аддитивных функционалов.

Хочу еще раз прояснить ситуацию. Традиционно в схемах усреднения и диффузионной аппроксимации малый параметр серии вводится "тривиально" в виде множителя к скачкам процесса. Идея ясна: малые скачки за большое время превращаются либо в детерминированное движение, либо во флуктуации, которые описываются диффузионными процессами. Третьего не дано. А вот нет!

Пуассоновская аппроксимация как раз и состоит в том, что "большие" скачки возможны, но с малыми вероятностями, для того чтобы в среднем и малые скачки с вероятностями, близкими к 1, суммарно были порядка ε . Так возникает первое условие пуассоновской аппроксимации для средних

$$\text{PA1: } \int v G_x^\varepsilon(dv) = \varepsilon [a(x) + \theta_a^\varepsilon(x)], \quad |\theta_a^\varepsilon(x)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Решающий шаг в построении условий пуассоновской аппроксимации состоит в том, чтобы *сохранить большие скачки с малыми вероятностями*, а для этого в монографии Ж.Жакода и А.Ширяева и существует условие на считающую меру, которое в нашем случае представляется в такой форме:

$$\text{PA2: } \int_R g(v) G_x^\varepsilon(dv) = \varepsilon [G_g^\varepsilon(x) + \theta_g^\varepsilon(x)], \quad |\theta_g^\varepsilon(x)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь главный член асимптотики, благодаря классу функций $g(v)e \in C_3(R)$, определяющему меру, можно представить в форме:

$$G_g(x) = \int_R g(v) G_x(dv),$$

с некоторой (вообще говоря, не нормированной) мерой $G_x(dv)$, которая, как раз, и сохраняет информацию о больших скачках. И в пределе задает интенсивность и распределение предельного пуассоновского процесса.

Лучше всего схема пуассоновской аппроксимации проясняется в частном случае конечного числа скачков приращений. Зададим случайные величины $a(x)$, $x \in X$,

$$\text{распределением: } \alpha(x) = \begin{cases} a, & \text{с вероятностью } \varepsilon p(x); \\ \varepsilon a_0, & \text{с вероятностью } 1 - \varepsilon p(x). \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$E\alpha(x) = \varepsilon [ap(x) + a_0] + o(\varepsilon), \quad \text{а } \int_R g(v) G_x^\varepsilon(dv) = \varepsilon g(a)p(x) + o(\varepsilon) \quad \text{для}$$

функции $g(v) \in C_2(R)$, т.е. $g(v) = \theta(v^2)$, $v \rightarrow 0$. Теперь очевидно, что асимптотическая мера $G_x(dv)$ в условиях пуассоновской аппроксимации PA2 имеет вид: $G_x(dv) = p(x)\delta_a(dv)$, где $\delta_a(dv)$

— мера Дирака, сосредоточенная в точке a . Отметим, что по PA1, $b(x)=ap(x)+a_0$, в то время как $b_0(x)=\int vGx(dv)=ap(x)$.

Так что $b(x)-b_0(x)=a_0$ — скорость детерминированного сноса аппроксимирующего пуассоновского процесса. Условие PA2 сохраняет информацию о больших скачках, а условие PA1 содержит информацию также о детерминированном сносе аппроксимирующего пуассоновского процесса, в который преобразуются малые скачки исходного процесса.

В схеме полумарковских случайных блужданий пуассоновская аппроксимация была построена во время моего очередного пребывания в Университете Бонна (Германия), в отделе стохастики, руководимом С.Альбеверио, удивительно разносторонним математиком, сохраняющим толерантность и интерес к самым разнообразным направлениям в современной математике.

Я горжусь работой, в которой для ПМСБ получены в пределе пуассоновский процесс со сносом. Было время, когда я очень сомневался, что мне когда-нибудь удастся завершить исследование полумарковских случайных блужданий в такой форме.

Кстати, надо еще отметить, что произошло объединение методов: КО для ПМСБ исследуется в схеме серий с применением решения проблемы сингулярного возмущения приводимо обратимого оператора. Надо было взглянуть на ПМСБ как на случайную эволюцию с полумарковскими переключениями!

5. Эвристические принципы фазового укрупнения. В 1982 году мы с А.Турбиным издали книгу "Процессы марковского восстановления в теории надежности систем", Киев, Наукова думка.

Проблема построения алгоритмов фазового укрупнения (АФУ) стохастических систем возникает в предположении, что имеется процесс марковского восстановления в схеме серий. Проблема оценки надежности стохастической системы предполагает "техническое" задание системы, для которой надо построить математическую модель, и лишь затем применять АФУ. Оказывается, что самые простые (полумарковские) системы описываются с использованием суперпозиции ПМВ, или, как их называли Б.В.Гнеденко и И.Н.Коваленко, — "линейчатые марковские процессы". При этом существенно меняется техника применения АФУ. Зато появляется новый класс математических объектов.

Так возникли "эвристические принципы фазового укрупнения стохастических систем", которые, впрочем, допускали строгое обоснование в виде АФУ. Однако главное состоит в том, что мы приобрели опыт построения адекватных моделей стохастических систем, возникающих в теории надежности и теории систем обслуживания.

6. Схема диффузионной аппроксимации систем обслуживания. В 1988 году в журнале "Кибернетика" я, совместно с тогдашней моей аспиранткой Л.В.Ваврикович, опубликовал статью о диффузионной

аппроксимации восстанавливаемой системы с резервированием. Более простую модель мы изучили с Володей Королюком, но так и не обнаружили диффузионной аппроксимации. В этот раз мне (а может, больше Л.В.Ваврикович) повезло: удалось построить простой алгоритм диффузионной аппроксимации процесса, описывающего число восстанавливаемых приборов в системе n одновременно работающих приборов (одинаковых!) с интенсивностью рабочего времени λ , при наличии $r \leq n$ восстанавливающих устройств с интенсивностью восстановления μ , а также m дополнительных, резервных приборов. Уже после того, как результат был получен, я узнал о существовании работы Иглехарда (1968 год), в которой рассматривалась точно такая же задача, но при иных соотношениях исходных параметров. Оставался невыясненным вопрос, какие еще модели можно рассматривать в этой проблеме восстановления (ремонта и т.п.). Полученного результата явно было недостаточно для защиты кандидатской диссертации, так что Л.Ваврикович уехала работать в Нежинский пединститут, закончив аспирантуру без защиты диссертации.

Если попытаться судить, кто виноват, то, конечно, в первую очередь — научный руководитель, который для кандидатской диссертации не сумел сформулировать достаточно глубокую проблему. Однако, вспомним с чего я начинал свою кандидатскую диссертацию — с точного распределения статистики Смирнова при одинаковых объемах двух выборок. Это тоже надо было развивать, что мне и удалось, построив асимптотические разложения для критериев согласия Колмогорова и Смирнова. Так что и аспирант должен обладать способностью к творческому поиску. Тем более, как оказалось впоследствии (о чем и пойдет сейчас речь), эта тема — весьма благодатная. В данный момент, когда я пишу об этом, находясь приглашенным профессором в Технологическом университете г. Компьень (Франция), тема диффузионной аппроксимации стохастических систем обслуживания представляет для меня наибольший интерес вот уже свыше пяти лет.

Следующим импульсом для изучения схемы диффузионной аппроксимации (СДА) послужила для меня книга В.В.Анисимова и Е.А.Лебедева "Стохастические сети обслуживания. Марковские модели" (1992). В ней приведены довольно общие теоремы диффузионной аппроксимации "процессов обслуживания". Будем так называть марковские процессы $v(t)$, $t \geq 0$, типа рождения и гибели, принимающие целочисленные значения. В книжке описаны два различных подхода к построению диффузионной аппроксимации. Подход В.В.Анисимова состоял в том, что процесс обслуживания рассматривался как "рекуррентный процесс полумарковского типа". Подход Е.А.Лебедева состоял в том, что процесс обслуживания описывался конструктивно при помощи комбинации пуассоновских процессов.

Замечу, что в монографии "старший" автор позволил себе привести оценку двух подходов в следующей форме: "...Рекуррентный подход позволяет охватить более широкие классы систем и сетей...". С моей точки зрения, это, конечно, неэтично. Да к тому же и неверно! Обе схемы диффузионной аппроксимации, описанные в монографии В.В.Анисимова, Е.А.Лебедева, меня не удовлетворили, и я стал искать подходящий класс марковских процессов, который содержал бы как частный случай процессы обслуживания. И вскоре мне стало ясно, что такой класс марковских процессов уже давно описан, например в монографии Гихмана И.И., Скорохода А.В. "Введение в теорию случайных процессов" (1965 г.), это — однородные процессы с локально независимыми приращениями (ПЛНП). О них хорошо сказано на с.47 "Марковские процессы, аппроксимируемые на малых промежутках времени процессом с независимыми приращениями". По-видимому, эти слова принадлежат И.И.Гихману. Он всегда обладал удивительной физической интуицией, возможно унаследованной от его учителя, выдающегося математика и физика Н.Н.Боголюбова.

И сейчас, пять лет спустя, я считаю, что ПЛНП служат адекватной моделью процессов обслуживания. Это значит, что не надо ни обобщать, ни сужать этот класс процессов, чтобы построить для процессов обслуживания диффузионную аппроксимацию. Может быть, как раз здесь уместно поговорить об этом понятии: "адекватная модель". С частной точки зрения адекватность модели означает полное (или достаточно полное) соответствие математической модели реальной системе. В более широком смысле "адекватная модель" означает класс (совокупность) математических моделей, содержащих как частный случай "адекватную" (с частной точки зрения) модель реальной системы. Например, для восстанавливаемых систем адекватной моделью служат процессы обслуживания типа рождения и гибели. А для системы диффузионной аппроксимации процессов типа рождения и гибели адекватной моделью служат процессы с локально независимыми приращениями. Хотя бы потому, что этот класс процессов содержит как процессы рождения и гибели, так и диффузионные процессы в евклидовом пространстве. Выяснив для себя выбор подходящего класса марковских процессов для построения СДА процессов обслуживания, я не без трудностей (о которых пойдет речь ниже) получил СДА в 1993 году и стал её пропагандировать. Прежде всего я предложил авторам книжки В.В.Анисимову и Е.А.Лебедеву, которая послужила для меня исходным импульсом, обсудить мою СДА на семинаре. Помню, что заседание было весьма бурным. Володя Анисимов защищался вяло, но и не признал моего преимущества в адекватности модели ПЛНП. Думаю, что он вообще не исповедует таких общих, в значительной мере философских, или, лучше сказать, естественно-научных принципов. Впрочем, стремление к

излишней общности, по-моему, вредно и для образования, и для научного творчества. Надо только правильно понимать, что значит "излишняя общность". Лучше всего это объяснять на конкретных примерах.

Теперь я постараюсь объяснить, в чем состояли трудности "вложения" процессов обслуживания в класс ПЛНП для реализации СДА. Лучше всего это объяснить на конкретном примере. Рассмотрим "систему о снабжении энергией" (в терминологии В.Феллера, т.1, с. 452, второе издание, 1964). состоящую из n одинаковых приборов, функционирующих независимо с параметрами интенсивности показательных распределения времени работы λ и времени восстановления μ . Процесс обслуживания $v_n(t)$, $t \geq 0$, задает число восстанавливаемых приборов в момент времени t . Очевидны следующие формулы для интенсивностей скачков процесса $+1$ с интенсивностью $\lambda_n(k) = (n-k)\lambda$, и интенсивностей скачков -1 с интенсивностью $\mu_n(k) = k\mu$.

Представим интенсивности в следующей форме:

$$\lambda_n(k) = n\lambda(u), \quad \mu_n(k) = n\mu(u). \quad (1)$$

Здесь $\lambda(u) = (1-u)\lambda$, $\mu(u) = u\mu$, $u = k/n$.

Введем теперь "базовый процесс" $k^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon = 1/n$, принимающий значения в том же фазовом пространстве, что и $v_n(t)$, т.е. $En = \{0, 1, \dots, n\}$ с интенсивностями скачков ± 1 , задаваемых функциями

$$\lambda(u) = (1-u)\lambda, \quad \mu(u) = u\mu, \quad (2)$$

при условии, что $k^\varepsilon(t)/n = u$, или, что то же самое, $k^\varepsilon(t) = nu$.

Очевидна связь процессов

$$v_n(t) = k^\varepsilon(nt) = k^\varepsilon(t/\varepsilon). \quad (3)$$

Для процесса $k^\varepsilon(t)$ легко обнаружить точку равновесия, которая притягивает траектории при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\varepsilon k^\varepsilon(t) \Rightarrow \rho = \lambda / (\lambda + \mu).$$

А значит, имеет место сходимость по вероятности и для процесса обслуживания при $n \rightarrow \infty$:

$$v_n(t)/n \Rightarrow \rho.$$

Теперь понятно, как нужно нормировать процесс обслуживания, чтобы получить диффузионную аппроксимацию. Нормированный и центрированный процесс обслуживания следует рассматривать в такой форме:

$$\zeta_n(t) = [v_n(t)/n - \rho] / \sqrt{n} = [v_n(t) - n\rho] / \sqrt{n}. \quad (4)$$

Это классическая форма нормирования в центральной предельной теореме.

Теперь нам предстоит вложить нормированный процесс обслуживания (4) в класс ПЛНП. Чисто скачкообразные марковские процессы (с ограниченной функцией интенсивностей) удобно задавать производящим оператором в таком виде:

$$Q\phi(n) = \int_{\mathbb{R}} Q(u, dz) [\phi(u+z) - \phi(u)]. \quad (5)$$

Обратим внимание, что ядро интенсивностей $Q(u, dz)$ определяет интенсивности величины скачка dz , а не положение процесса после скачка, как это принято для марковских процессов в произвольном фазовом пространстве состояний. Здесь использовано преимущество метрического пространства.

Используя связь процессов (3), и полагая теперь $\varepsilon=1$, $\forall n$, нормализованный процесс обслуживания (4) можно представить в виде

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \kappa^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho. \quad (6)$$

При этом, напоминая, что интенсивности скачков ± 1 процесса $k^\varepsilon(t)$ заданы в (2). Остается вычислить производящий оператор процесса (6), используя следующее представление ядра интенсивностей процесса $k^\varepsilon(t)$:

$$Q^\varepsilon(u, +1) = (1-u)\lambda, \quad Q^\varepsilon(u, -1) = u\mu. \quad (7)$$

Следовательно, нормированный процесс $\varepsilon k^\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ задается производящим оператором

$$Q^\varepsilon \phi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} Q^\varepsilon(u, dz) [\phi(u+ez) - \phi(u)]. \quad (8)$$

Заметим, и это существенно, что в представлении (8) условия, налагаемые на процесс $k^\varepsilon(t)$ рассматриваются в нормированном фазовом пространстве состояний $E^\varepsilon = \{u = k/n, k \geq 0\}$, а величины скачков dz — в исходном фазовом пространстве $E_n = \{k \geq 0\}$. Такая смесь оказывается весьма полезной в схеме диффузионной аппроксимации реальных процессов обслуживания.

Принимая во внимание связь (6), которую для наглядности представим в таком виде:

$$\varepsilon^2 \kappa = \rho + \varepsilon \zeta, \quad (9)$$

легко вычисляется производящий оператор процесса (6):

$$L^\varepsilon \phi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz) [\phi(u+ez) - \phi(u)]. \quad (10)$$

Сингулярность производящего оператора только кажущаяся. На самом деле здесь все предусмотрено, чтобы получить в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ производящий оператор диффузионного процесса, который, как известно, представим дифференциальным оператором второго порядка (в однородном по времени случае):

$$L^0 \phi(u) = a(u) \phi'(u) + 1/2 B(u) \phi''(u). \quad (11)$$

Сведение (10) и (11) осуществляется просто с использованием формулы Тейлора для тест-функции

$$\phi(u+ez) = \phi(u) + ez \phi'(u) + \varepsilon^2 z^2 / 2 \phi''(u) + \varepsilon^2 \theta_\varepsilon.$$

Значит, на достаточно гладких тест-функциях оператор (10) имеет асимптотическое представление

$$L^\varepsilon \phi(u) = \varepsilon^{-1} a_\rho^\varepsilon(u) \phi'(u) + \frac{1}{2} B_\rho^\varepsilon(u) \phi''(u) + \theta_\varepsilon. \quad (12)$$

Здесь $|\theta_\varepsilon| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

$$a_\rho^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{R}} z Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz), \quad B_\rho^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{R}} z^2 Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz)$$

— первый и второй момент величины скачка соответственно.

Заметим, что снова в (12) имеем сингулярность по ε , которая исчезает благодаря дополнительному *условию баланса*.

Теперь предположим, что первые два момента величины скачка процесса обслуживания допускают асимптотическое представление в виде:

$$1: a_\rho^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{R}} z Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz) = a_0(u) + \varepsilon a(u) + \varepsilon \theta_\varepsilon,$$

$$2: B_\rho^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{R}} z^2 Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz) = B(u) + \theta_\varepsilon$$

с исчезающими членами θ_ε (разными) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда коэффициенты в (12) представимы соответственно в виде

$$\begin{aligned} a_\rho^\varepsilon &= a^\varepsilon(\rho + \varepsilon u) = a_0(\rho + \varepsilon u) + \varepsilon a(\rho + \varepsilon u) + \varepsilon \theta_\varepsilon = \\ &= a_0(\rho) + \varepsilon [a(\rho) + u a'_0(\rho)] + \varepsilon \theta_\varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

$$B_\rho^\varepsilon(u) = B^\varepsilon(\rho + \varepsilon u) = B(\rho + \varepsilon) + \theta_\varepsilon. \quad (15)$$

Очевидно, что нулевой член не зависит от переменной u , так как при $\varepsilon=0$ ядро $Q^\varepsilon(\rho + \varepsilon u, dz)$ превращается в $Q^0(\rho, dz)$. Здесь и срабатывает условия баланса в виде 3: $a_0(\rho) = 0$.

В итоге, условия 1: — 3: обеспечивают асимптотическое представление исходного производящего оператора (10) нормированного (и центрированного) процесса обслуживания (6) в следующем виде:

$$L^\varepsilon \phi(u) = L^0 \phi(u) + \theta_\varepsilon. \quad (16)$$

Это представление и является исходным при доказательстве предельной теоремы о сходимости процессов обслуживания (6) к диффузионному процессу типа Орнштейна-Уленбека с производящим оператором

$$\begin{aligned} L^0 \phi(u) &= b(u) \phi'(u) + \frac{1}{2} B \phi''(u) \\ b(u) &= a(\rho) + u a'_0(\rho), \quad B = B(\rho). \end{aligned} \quad (17)$$

Предельный диффузионный процесс является однородным по времени благодаря равновесному центрированию исходного процесса обслуживания в (6).

При формулировке предельной теоремы необходимо ввести дополнительное условие о сходимости начальных значений процессов. В нашем случае такое условие выглядит так:

$$\zeta^\varepsilon(0) \Rightarrow \zeta^0(0),$$

или же в асимптотическом виде:

$$4: \quad \varepsilon^2 \kappa^\varepsilon(0) = \rho + \varepsilon \zeta^0(0) + \varepsilon \theta_\varepsilon.$$

Так что, в условиях нормировки (6) диффузионная аппроксимация имеет место в ε -окрестности точки равновесия ρ . Если же условие 4: не

выполнимо, то возникает проблема центрирования процесса обслуживания функцией сноса $p(t)$, зависящей от времени t . Исходный нормированный процесс обслуживания рассматривается в виде:

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \kappa^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho(t). \quad (18)$$

Детерминированный снос $p(t)$ задается решением эволюционного уравнения

$$d\rho(t)/dt = C(\rho(t)), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (19)$$

И это существенный момент в центрировании процесса обслуживания. Легко теперь представить себе вид производящего оператора процесса (18) (сравнить с (10)):

$$L_\varepsilon \phi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} Q^\varepsilon(\rho(t) + \varepsilon u, dz) [\phi(u + \varepsilon z) - \phi(u)] - \varepsilon^{-1} C(\rho(t)) \phi'(u) \quad (20)$$

Центрированный процесс обслуживания с функцией сноса, зависящей от времени, оказался неоднородным во времени марковским процессом. Это конечно, очевидно. Но сначала я растерялся, не зная, что будет дальше в асимптотическом анализе. Для большей уверенности я дал двум своим коллегам вывести производящий оператор процесса (18). Оба принесли мне неправильные выражения. То ли они отнесли к моей просьбе легкомысленно, то ли они не заметили (как и я вначале), что ситуация сложнее, чем кажется.

Имея опыт асимптотического анализа производящего оператора (10), нетрудно получить асимптотическое представление оператора (20), используя в качестве предварительных те же условия 1: и 2:, но уже теперь в измененной форме:

$$\begin{aligned} 1: a_i^\varepsilon &= a^\varepsilon(\rho(t) + \varepsilon u) = a_0(\rho(t)) + \varepsilon [a(\rho(t)) + u a'_0(\rho(t))], \\ 2: B_i^\varepsilon(u) &= B(\rho(t)) + \theta_\varepsilon. \end{aligned}$$

7. Алгоритмы диффузионной аппроксимации сетей обслуживания. Вот этот опыт я и применил при построении алгоритмов диффузионной аппроксимации марковских многокомпонентных систем. Простейшим представителем таких систем является "система потребления энергии", описанная в книге В.Феллера, т. II, § 18.5.

Монография В.В.Анисимова и Е.А.Лебедева "Стохастические сети и их приложения", Киев, Либідь, 1992 г., стала для меня отправным пунктом в построении алгоритмов диффузионной аппроксимации (АДА) для марковских процессов с "локально-независимыми приращениями", которые М. Davis называет PDMP (piece-wise deterministic Markov processes) — кусочно-детерминированные марковские процессы.

Я убежден, что мне удалось выделить адекватный объект исследований и построить наиболее эффективным образом АДА. Так появилась глава 5 в нашей книге (I - 20, 1999), и целая серия статей и докладов на конференциях (см., например, III - 196, 1993, III-217, 1999).

Специфика рассматриваемой проблемы состоит в том, что АДА надо строить для "центрированного" процесса. При этом возникает проблема построения производящего оператора. Здесь существенную роль играют два момента: 1) центрирующая функция должна порождать *полугруппу*. В реальных задачах она задается решением эволюционного уравнения; 2) производящий оператор центрованного процесса выражается через генератор исходного процесса со *сдвинутым* (!) аргументом интенсивностей. В простейшем случае, когда имеется центрирующая константа ρ , соотношение выглядит следующим образом:

$$L_{\zeta+\varepsilon}(u) = L_{\zeta+\varepsilon}(\rho + \varepsilon u) \quad .$$

8. Системы обслуживания с полумарковским входом.

Долгое время я не мог представить себе, как задать ПМСЭ для системы обслуживания с полумарковским потоком требований.

Летом 2004 года, размышляя над результатами докторской диссертации Е.Лебедева, я, наконец, понял, как строится ПМСЭ для такой системы. Это будет кандидатская диссертация моей аспирантки А.Мамоновой. Заодно, я понял также, как строить АДА для ПМСЭ с эквилибриумом (в марковском случае (см. III - 232 , 2004). В отличие от марковских случайных эволюций в полумарковской эволюции КО задается с использованием произведений полугрупп исходной эволюции и центрирующей!

9. Теория устойчивости стохастических систем. Это направление я рассматриваю как спортивное достижение, возникшее благодаря моей дружбе с Е.Ф.Царьковым, который занимается развитием этой теории профессионально. Мне захотелось проверить "сопутствующую" идею: можно ли в схеме усреднения и диффузионной аппроксимации стохастических систем (т.е. случайных эволюций) решать другие (сопутствующие) задачи, например, устанавливать устойчивость исходной СЭ в предположении устойчивости усредненной. После 2-3 лет подготовки я убедился в положительном ответе на такой вопрос, опубликовал несколько работ и считаю эту проблематику весьма перспективной. Следует отметить, что Женя Царьков, как профессионал, обладающий высокой математической культурой, здесь, конечно, вне конкуренции. Однако с полумарковскими переключениями у него опыта, по-моему, пока нет. Это направление сейчас исследует мой ученик Ярослав Чабанюк (Львовская политехника), и, по-моему, весьма успешно.

10. Стохастические полиномы Кравчука (СПК). Я горжусь тем, что спустя более чем 60 лет с тех пор, как были введены полиномы Кравчука, мне удалось существенно обобщить это понятие, применить теорию случайных перманентов. Я убежден, что именно так должны вводиться симметрические статистики. Мое убеждение основано на том, что теория СПК вкладывается естественным образом в теорию

семимартингалов, в частности, с использованием уравнения Долеана-Доде (см. III - 197, 1993; III - 234, 2004).

Справедливости ради, следует отметить, что инициатива в пристальном взгляде на полиномы Кравчука с позиций теории случайных перманентов, принадлежит В.В.Строку, моему давнему попутчику (и не только моему), в каждодневных организационных хлопотах в жизни Института математики. Он обратил мое внимание на то, что формула декомпозиции перманентов похожа (?) на формулы для полиномов Кравчука. В математике такие совпадения чреваты новыми открытиями. Вот мне и удалось открыть СПК!

С огорчением констатирую, что это открытие прошло незамеченным и на 1-й, и на 7-й конференциях, посвященных памяти М.Кравчука. Права моя жена Нина: "Не интересуемся мы работами друг друга, если только они не слишком уж пересекаются с нашими".

Когда-то давно, когда я общался с А.Н.Колмогоровым, он высказал гипотезу о будущем ученого: надо вовремя прекратить заниматься творческой деятельностью и перейти к наслаждению "природной" жизнью. Например, он сказал "Я хотел бы быть водолеем на барже"... С тех пор, я гуляя вдоль реки Луазы, близь Компьеня, и глядя на деловито снующие по реке баржи, пустые и перегруженные, провожая их взглядом, вспоминаю Андрея Николаевича и пытаюсь представить себя сопровождающим баржи. Не получается. Пожалуй, мне больше подходит быть лесничим, о чем я мечтал в детстве. Иногда мечты сбываются! Но не всегда и не в том виде, на который мы рассчитываем.

Творчество в XXI веке

XX-й век для меня завершился вместе с 1999 годом. Вторую половину 1999-го года мы с Ниной провели в Америке, сначала в США, имея "Green-card", а затем в Канаде, у сына Володи, в Торонто. По приглашению проф. Николаоса Лимниоса (Технологический университет в Компьене) я получил возможность жить и работать во Франции в течение 7 месяцев.

В самом конце 1999-го года я на одну неделю приехал в Киев, чтобы оформить себе научную пенсию. И мне это чудом удалось. Я вернулся в Компьень в последних числах 1999-го года и мы с Ниной встретили 2000-й год, год начала XXI века во Франции с французским шампанским и французскими закусками, смотря по телевизору праздник в Париже. Думаю, что дискуссия о начале XXI века в 2000-м году или в 2001-м условна. Все зависит от того, как начинать счет натурального ряда чисел с нуля или с единицы. Правда, остается открытым вопрос, когда было начало 1-го века? Однако, как известно, Иисус Христос родился за 4 года до начала новой эры. Так что любой из этих лет можно считать началом нового века, а лучше, конечно - последний.

Размышляя над перспективами научного творчества с Лимниусом, я естественно, не колебался. Надо было развивать метод сингулярного возмущения в асимптотическом анализе стохастических систем с полумарковскими переключениями, используя удивительные свойства компенсирующего оператора расширенного процесса марковского восстановления, предложенного А.Д.Вентцелем.

Вместе с тем к тому времени я уже понимал, как строить усреднение и диффузионную аппроксимацию для полумарковских случайных блужданий (см. III — 203 (1995)).

Юбилейная монография. Комфортные условия жизни и работы в Компьене стимулировали желание продлить наше творческое содружество с Н.Лимниусом. Для этого надо было сформулировать программу на много лет вперед. И такая программа естественно появилась. В конце прошлого (XX века) я разочаровался в подходе к анализу стохастических систем с полумарковскими переключениями, основанными на мартингальной характеристизации вложенного процесса марковского восстановления. В работах М.Свириденко (ученица А.Д.Вентцеля) предельные теоремы для полумарковских процессов в эвклидовом пространстве реализовались с использованием компенсирующего оператора, что существенно упрощало схему асимптотического анализа.

Я был уверен, что использование компенсирующего оператора в схеме асимптотического анализа полумарковских стохастических систем даст адекватный подход.

Мой ученик А.Свищук не пожелал прислушаться к моему мнению. Теперь, во Франции, в технологическом университете г. Компьень у меня была реальная возможность переписать наши предыдущие результаты, полученные с А.Турбинным и А.Свищуком, по новой схеме с применением компенсирующих операторов.

Я предложил проф. Н.Лимниусу составить план и приступить к написанию монографии "Stochastic System in Asymptotic scheme". Впоследствии название изменилось и в 2005 году монография "Stochastic System in Merging Phase Space" была опубликована издательством World Scientific Publishing. *Укрупнение фазового пространства* (Merging Phase Space) - это наше "фирменное блюдо" в Киевской школе по теории вероятностей: возможность асимптотического фазового укрупнения марковских и полумарковских процессов. Прежде всего, следует отметить, что асимптотическое фазовое укрупнение полумарковского процесса приводит к марковскому укрупненному процессу. А это уже методологический результат. При наблюдении подмножеств состояний сложной системы, которые обладают определенным свойством устойчивости, мы, по сути, наблюдаем марковскую систему, у которой

число состояний совпадает с числом наблюдаемых подмножеств исходной сложной системы.

Имеются и другие, не менее важные соображения в пользу схемы фазового укрупнения. Например, схема усреднения является частным случаем, когда все исходное пространство состояний укрупняется в одно состояние. При наличии нескольких укрупненных состояний, исходная стохастическая система преобразуется в более, простую, но также стохастическую систему, и притом марковскую.

Я беру на себя смелость утверждать естественно-научный принцип в описании стохастических систем: "Стохастические системы обладают марковским свойством". Немарковость возможна только в математических моделях, для которых возможно применение алгоритмов фазового укрупнения.

Почему математическая общественность в упор не замечает схемы фазового укрупнения, для меня остается загадкой.

Остается надеяться, что математики обратят внимание на результаты 4-й главы нашей с Н.Лимниосом монографии и найдут возможность и расширить и углубить проблематику, а также найдут прикладные интерпретации стохастических моделей систем с фазовым укрупнением состояний случайной среды.

Кстати, мы с А.Турбиным пришли к постановке задач фазового укрупнения состояний полумарковского процесса после того, как я обобщил проблему оценки надежности сложной системы, рассматривая задачу о времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний в условиях асимптотического фазового укрупнения этого подмножества. Эти условия проявляются, когда вероятности выхода из данного множества, усредненные по стационарному распределению опорного марковского процесса стремятся к нулю вместе с малым параметром серии (см. III — 60, 1969, а также III — 100, 1977). Простота постановки задачи увлекла В.Анисимова, который построил свою теорию фазового укрупнения состояний, основанную на применении эргодической теоремы. Следует упомянуть также монографию G.Yin, O.Zhang. Continuous time Markov chain and applications. A singular perturbation approach. Springer, 1988. в которой алгоритмы фазового укрупнения состояний марковских (и полумарковских) процессов строятся в предположении конечности состояний фазового пространства. Отсутствие четко выраженной символики и алгоритмов решения проблем сингулярного возмущения для производящих операторов скачкообразных эргодических марковских процессов делает их изложение мало обозримым.

Последнее замечание следует объяснить. Понятие "мало обозримости" схемы, алгоритма, теории, — весьма субъективно. Если математик вдумался в изучаемую теорию, то она, как правило, становится

обозримой. Однако существует (или должны существовать) исходные принципы, которые обеспечивают обозримость теории не только для избранных.

Эти принципы основаны на объективных формулировках основных понятий и связей между ними, которые обеспечивают свободное восприятие теории. Последнее означает доступность теории для достаточно грамотного математика.

Понимая, что я свел проблему "обозримости" теории к проблеме "грамотности" математика, я позволю привести пример из жизни знаменитого семинара И.М. Гельфанда в Московском университете. Наблюдая, как он терзает докладчика, представляющего новую схему (или теорию), понимаешь, что Гельфанд ищет в своем мозгу адекватную схему, изложенную в его представлениях. Сразу после удачной находки он теряет интерес к докладчику и сам излагает результаты, которые до этого момента ему были неизвестны или непонятны.

Мне представляется очевидным, что теория фазового укрупнения состояний марковских процессов и ее применение в анализе сложных стохастических систем изложена в нашей монографии II — 22 с достаточной обозримостью формулировок, позволяющих активному восприятию теории, не только математиками, но и прикладникам с хорошей математической культурой.

Приступая к написанию монографии, я не думал, что этот труд займет более 4-х лет. Уже в самом конце, когда рукопись книги была почти готова, во время нашего очередного обсуждения содержания книги профессор Николаос обронил: "Пожалуй, лучше писать много статей, чем одну монографию". Однако наличие монографии существенно при дальнейшем стремлении писать статьи. Во-первых, можно заняться эпигонством, т.е. применять методы, опубликованные в монографии, к новым объектам; а во-вторых, имя автора монографии стимулирует издателей охотнее публиковать статьи. Например, наши две статьи для энциклопедии по статистике были заказаны редакцией, думаю потому, что мы уже имели монографию по анализу стохастических систем в случайной среде.

Пуассоновская аппроксимация. Моей заветной мечтой было построение пуассоновской аппроксимации для случайных блужданий, чтобы в результате предельного перехода получить сложный процесс Пуассона со сносом, для которого существует эффективный метод анализа граничных функционалов — метод потенциала (см. I — 1).

Все дело в том, что усреднение и диффузионная аппроксимация случайных процессов в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) осуществляется в условиях асимптотически малых приращений процесса. А в схеме пуассоновской аппроксимации должны проявляться скачки конечной величины. К тому времени одной из моих настольных книг была

монография Ж.Жакода и А.Н.Ширяева "Предельные теоремы для случайных процессов" (1984 г.).

В этой монографии, по моему мнению, изложены наиболее общие результаты о сходимости семимартингалов в схеме серий. А если считать семимартингалы наиболее общей формой задания случайных процессов в евклидовом пространстве, тогда универсальность предельных теорем для семимартингалов очевидна.

Как всегда, на прогулке по парку аббатства, который разделял нашу резиденцию и здания университета в Компьене, я сообразил, что "загадочные" условия на меры скачков семимартингала и есть в точности условиями, необходимыми для сохранения в предельном процессе скачков конечной величины. Странно, что авторы монографии не обсудили интуитивную (естественно-научную) интерпретацию этих условий. Такая интерпретация не только дает возможность понимания, но и создает условия для широкого разнообразия применений.

Для меня проблема состояла в том, чтобы понять, как эти условия формулируются для импульсных процессов приращений с марковскими и полумарковскими переключениями. Следуя, в точности схеме, изложенной в цитируемой монографии, я пришел к проблеме сингулярного возмущения для предсказуемых характеристик импульсного процесса. Далее, как говорится, дело техники. В результате, статья III - 233 была подготовлена в середине 2000-го года и отправлена в журнал "Теория вероятностей и ее применения". Публикация статьи в конце 2004 года свидетельствует, что рецензенты статьи долго сомневались в необходимости применения метода сингулярного возмущения. Дело в том, что предельные теоремы для семимартингалов предполагают сходимость предсказуемых характеристик. А в нашей работе сходимость предсказуемых характеристик следует из условий решения проблемы сингулярного возмущения. Написать бы такую фразу во введении к статье, — и может быть процедура рецензирования упростилась.

А пока мы с Николаосом использовали метод пуассоновской аппроксимации для других объектов. Прежде всего, логично было применить этот метод к случайным процессам с независимыми приращениями. Вначале я было замахнулся на построение пуассоновской аппроксимации процессов с локально независимыми приращениями или, иначе - дифференцируемые процессы по определению в монографиях А.В.Скориха и И.И.Гихмана.²

Однако парадоксальная ситуация, когда в анализе предсказуемой характеристики участвует исходный процесс, — остановила меня. Я отложил эту задачу до лучших времен. Профессор Н.Лимниос доложил

² В монографии M.Davis "Markov Models and Optimization" такие процессы называются "piecewise-deterministic".

наши результаты на конференции в Киото (2000) и услышал замечание-вопрос: "А почему бы не получить в пределе процесс Леви с диффузионной компонентой?" Признаюсь, я долго не мог понять, почему диффузионная компонента не возникает в условиях пуассоновской аппроксимации. А затем, как всегда наступает озарение. Для возникновения диффузионной компоненты необходимо наличие сингулярной составляющей в асимптотическом представлении первой предсказуемой характеристики, которая задается математическим ожиданием скачков. Так появилась работа III - 238.

Имея опыт построения пуассоновской аппроксимации для импульсных процессов, не трудно было сообразить, как построить пуассоновскую аппроксимацию для полумарковских случайных блужданий. А это была моя заветная задача. Здесь существенно используется представление случайных блужданий в полумарковской случайной среде, которая описывается суперпозицией двух независимых процессов восстановления (см. III-229).

Итак, полумарковские случайные блуждания, исследованы в асимптотической схеме во всех трех вариантах: усреднение, диффузия и пуассоновская аппроксимация.

Правда, остается еще не реализованным пуассоновская аппроксимация случайных блужданий с граничными условиями, например, с условиями отражения в нуле. Я мечтаю, построить аппроксимацию процесса накопления с отражением в нуле сложным пуассоновским процессом со сносом, для которого существует аналитический подход вычисления граничных функционалов методом потенциала (см. I-1).

Проблема построения пуассоновской аппроксимации процессов с локально независимыми приращениями долгое время оставалась открытой до тех пор, пока я не познакомился с работой Р.Липцера "Принцип усреднения Боголюбова для семимартингалов", Труды Математического института им. Стеклова, 1994, №4, в которой принцип усреднения Боголюбова обобщается на достаточно общие семимартингалы, включающие также и процессы с локально независимыми приращениями. Надо было понять, как Р.Липцер избегает парадокса при доказательстве сходимости семимартингала, доказывая сходимость предсказуемых характеристик, зависящих от исходного процесса.

Я поручил своему ученику (внучатому) И.Самойленко изучить работу Р.Липцера и реализовать его схему доказательства для пуассоновской аппроксимации процесса с локально независимыми приращениями (ПЛНП). Все получилось, как я предполагал. Однако парадоксальная ситуация проявлялась при применении метода сингулярного возмущения. В задание производящего оператора трехкомпонентного марковского процесса: исходного процесса, его

предсказуемой характеристики и переключаемого марковского процесса, входит производящий оператор исходного процесса. Метод сингулярного возмущения подсказывает выход. Надо рассматривать исходный производящий оператор на тест-функциях, независимых от первой компоненты (состояний исходного процесса). В итоге алгоритм решения проблемы сингулярного возмущения приводит к доказательству сходимости предсказуемых характеристик. А компактность исходного процесса в схеме серий и единственность предельных характеристик обеспечивает сходимость исходного ПЛНП в схеме серий к усредненному ПЛНП, в котором предсказуемые характеристики также зависят от исходного процесса.

Осенью 2007 года статья трех авторов, включая и И.Лимниоса, подготовлена И.Самойленко и отправлена Лимниосу для усовершенствования введения и представления в журнал. И снова появляется парадокс (?) Н.Лимниос присылает список журналов, в которых французские ученые обязаны (?) публиковать свои работы, иначе их публикации не будут приниматься во внимание. В этом списке журналов отсутствуют, например, наши математические журналы: "Украинский Математический журнал", "Теория вероятностей и математическая статистика", которые переводятся на английский язык, можно сказать, издавна. На мой взгляд, это откровенная дискриминация, как свободы творчества французских ученых, так и наших украинских математических изданий. Любопытно, какое решение по этому поводу примет В.С.Корольюк?

Теперь для меня пока нет загадок в применении пуассоновской аппроксимации к стохастическим процессам с редкими "большими" скачками. Я вижу серию задач, с которыми успешно справится мой ученик. Однако в предутренние часы по инерции мозг ищет новые схемы пуассоновской аппроксимации. Одна из таких схем неожиданно сформировалась под влиянием работы Анисимова, Случайные процессы с дискретной компонентой, 1988.

Удивительно, как можно все написать и в тоже время загадать головоломку в постановке задачи. В который раз я столкнулся с "неадекватностью" описания (с точки зрения моего восприятия!).

Как всегда в утренние часы озарило: В.Анисимов в цитируемой выше работе изучает пуассоновскую аппроксимацию процессов накопления, приращения которых зависят от других процессов накопления в схеме серий, удовлетворяющий принципу усреднения. В результате предельные характеристики пуассоновской аппроксимации зависят от траектории предельного усредненного процесса. Условия пуассоновской аппроксимации В.Анисимов формулирует в терминах характеристических функций, а схема усреднения реализуется с помощью эргодической теоремы. Так что, моему ученику есть чем заняться:

сформулировать и построить пуассоновскую аппроксимацию процессов накопления, а также ПЛНП в схеме усреднения.

Диффузионная аппроксимация стохастических систем в схеме усреднения. Наблюдая, как лихо расправляются математики-прикладники в анализе стохастических систем с "эквilibриумом", я также решил, что нам пора исследовать флуктуации стохастических систем относительно "эквilibриума", то есть предельного значения системы в схеме усреднения. Если исходный процесс - марковский, то и флуктуации (разность между исходным и предельным значениями) также будет марковским процессом. Так что остается правильно вычислить производящий оператор флуктуаций. Здесь возникает нестандартная ситуация. Нам необходимо представить генератор флуктуаций через генератор исходного марковского процесса. Задача настолько простая, что на нее никогда не обращают внимания в учебниках по теории марковских процессов. Однако для того, чтобы такое представление построить, надо преодолеть определенный стереотип. А именно, генератор марковского процесса задается на тест-функциях определенной формулой, например, для скачкообразных процессов

$$Q\varphi(x) = \int_E [\varphi(y) - \varphi(x)] Q(x, dy),$$

Здесь аргумент тест-функции x : совпадает с аргументом ядра интенсивностей $Q(x, dy)$.

А как может быть иначе? Может!

Для разности $\beta(t) = a(t) - a$, очевидно, что генератор процесса $\beta(t)$ выражается через генератор процесса $a(t)$ формулой

$$Q_\beta \varphi(x) = \int_E [\varphi(y) - \varphi(x)] Q_a(a+x, dy) \quad (1)$$

Спрашивается, как формально задать связь генераторов Q_β и Q_a ? Надо вводить аргумент не только в тест-функцию, но и в обозначение генератора. Сложнее обстоит дело при изучении флуктуаций исходного марковского процесса относительно детерминированного процесса, например для $\beta(t) = a(t) - a(t)$, где $a(t)$ — детерминированный процесс, который задается генератором $A\varphi(x) = A(x)\varphi'(x)$. Это означает, что траектории $a(t)$ задаются уравнением $da(t)/dt = A(a(t))$.

Очевидно, что в данном случае разность $\beta(t)$ не является марковским процессом. Однако можно "расширить" схему и рассматривать двухкомпонентный процесс $\gamma(t) = (\beta(t), a(t))$ который, очевидно, будет марковским. Остается вычислить его генератор Q_γ на тест-функциях $\varphi(x, a)$, имея генераторы компонент Q_a и A . Когда-то я предлагал эту задачу одному из своих учеников. Он принес абракадабру.

А где об этом можно прочесть?

В действительности, результат достаточно простой, но в определенном смысле, неожиданный:

$$Q_\gamma \varphi(x, a) = [Q_\beta - A_x] \varphi(x, a) + A_a \varphi(a, x) \quad (2)$$

Здесь:

$$A_x \varphi(x) = A(a) \varphi'(x), \quad A_a \varphi(a) = A(a) \varphi'(a),$$

а оператор Q_β действует по формуле (1).

Уяснив эту проблему нам достаточно легко удалось получить асимптотическую диффузионную аппроксимацию стохастических систем с марковскими (и полумарковскими) переключениями в схеме усреднения (см. III - 231).

Чтобы убедиться в простоте асимптотического анализа генератора флуктуаций приведем лишь одну формулу для нормированной разности

$$\beta^\varepsilon(t) = [\alpha(t) - a]/\varepsilon \quad \text{или} \quad \alpha^\varepsilon(t) = a + \varepsilon \beta^\varepsilon(t).$$

Так что, генератор флуктуаций в евклидовом пространстве E имеет представление

$$Q_\beta^\varepsilon \varphi(x) = \varepsilon^{-2} \int_E [\varphi(x + \varepsilon z) - \varphi(x)] Q_a^\varepsilon(a + \varepsilon x, dz). \quad (3)$$

Не представляет труда, используя формулу Тейлора для достаточно гладких тест-функций $\varphi(x)$, получить асимптотическое представление

$$Q_\beta^\varepsilon \varphi(x) = L\varphi(x) + \theta^\varepsilon \varphi(x),$$

с

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2} C \varphi''(x) + b(x) \varphi'(x)$$

с остаточным членом $\theta^\varepsilon \varphi(x) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

При этом, как всегда в центральной предельной теореме, предполагается выполнение условия баланса:

$$\int_E z Q(a, dz) = 0.$$

Представим любопытным вычислить коэффициенты диффузии C и сноса $b(x)$.

Мне кажется, что при некоторых начальных условиях снос может исчезнуть.

Остается еще одна проблема: построить генератор разности двух марковских процессов по заданному генератору двухкомпонентного марковского процесса. Теперь это проблема не сложная.

Творчий шлях В.С.Королюка в запитаннях і відповідях

Н.Балакришнан, Н.Лімніос, В.С.Королюк

Резюме: Творча біографія В.С.Королюка у вигляді анкетного опитування, відтвореного першими двома авторами.

П1: *Дата і місце народження.*

В1: 19 серпня 1925 року, Київ, Україна.

П2: *Чи не могли б Ви розповісти про своє дитинство?*

В2: Тихе, радісне і з перспективами. Особливо після голодомору в Україні, у 1931 – 1933 рр. Я народився в замку, що називався "Замок Ричарда Левине Серце". Велика кімната нашої квартири мала вікно на стелі. Я міг бачити зірки вночі. У мене також був чудовий вид на Дніпро і Поділ (нижню частину Києва). Моя школа містилася прямо під пагорбом, на якому стояв наш будинок. Так що я міг добігти до неї приблизно за 40 секунд. Моє дитинство було перерване вторгненням фашистів в СРСР 22 червня 1941 р. А тижнем раніше я отримав відмінний атестат про закінчення середньої школи.

П3: *Які навчальні заклади Ви відвідували і які предмети вивчали? Хто (чи що) спонукав (спонукало) вивчати математику?*

В3: Скільки я себе пам'ятаю, мені завжди подобалася математика. Це тому, що принципи математики приваблювали мене своєю чіткою логікою та абстрактною вичерпною повнотою, і водночас, простотою алгоритмів. Мені подобалося розв'язувати арифметичні, а надто — стереометричні задачі. Я міг розв'язати стереометричну задачу і при цьому виконував довгі тригонометричні перетворення подумки, без олівця, записував тільки результат. Від цього вчитель лютував.

П4: *Чи можете Ви розказати про ваше навчання в університеті в Києві?*

В4: Моє навчання в Київському університеті тривало дев'ять років, з 1941 р. до 1950 р. З них 5 років я служив офіцером в армії (1942-1947 рр.). Крім того, я був студентом інших чотирьох вузів: гірничо-інженерного інституту (Донбас), Ташкентського і Харківського університетів і педагогічного інституту (Бухара, Узбекистан).

П5: *Розкажіть про вашу роботу і співпрацю з Борисом Гнеденком в Києві.*

В5: Мені поталанило зустріти Б.Гнеденка в 1949 р., якраз після закінчення мого навчання в Київському університеті. Темою моєї

дипломної роботи я вибрав одну з задач, запропонованих Б.Гнеденком. Так що це було відправним пунктом мого наукового життя. Мою першу наукову роботу "Декілька зауважень до теорії областей притягання стійких розподілів" було надруковано в журналі "Доповіді Академії наук" у 1950 р. у співавторстві з моїм учителем Б.В.Гнеденком. Очевидно, що таку назву роботи міг запропонувати лише він. Після того, як, застосовуючи методи відомої монографії Б.В.Гнеденка і А.Н.Колмогорова, я знайшов досить прості умови вибору нормуючих констант, Б.В. запропонував мені вивчити умови притягання до стійких розподілів у термінах характеристичних функцій. Зауважу, що Б.В., звісна річ, міг самостійно розв'язати цю задачу. Він подарував мені цей результат, коли повірив у мої творчі можливості. Згодом, коли Б.В. на своєму семінарі запропонував вивчати розподіли статистик Смирнова для двох вибірок однакового об'єму, мені допомогла книжка С.Чандрасекара "Стохастичні проблеми у фізиці та астрономії", в якій я знайшов геометричний підхід в аналізі граничних задач для випадкових блукань. Так виник метод траєкторій, за допомогою якого можна було вивчати розподіли різних функціоналів для двох вибірок однакового (або кратних) об'ємів.

П6: Далі, в Москві, Ви співпрацювали з Хінциним і Колмогоровим. Чи не могли б Ви щось розказати про них?

В6: Я разом із моїми друзями А.Скороходом і В.Михалевичем був направлений Б.Гнеденком у Московський університет восени 1953 р. Саме тоді відкрили новий будинок Московського університету на Ленінських гірках. Ми отримали чудову можливість працювати і відвідувати лекції й семінари видатних професорів знаної московської математичної школи. У нас також була можливість спілкуватися з А.Н.Колмогоровим не тільки на його лекціях, а й у нього на квартирі та на їхній спільній з А.Александровим знаменитій дачі у Комарові. Для нас, аспірантів Б.В., згода А.Н.Колмогорова прийняти нас аспірантами до Московського університету (у А.Скорохода керівником був Є.Б.Динкін) була прекрасним подарунком. Ми потоваришували з новим поколінням "імовірнісників" у МГУ: Ю.Прохоровим, В.Золотарьовим, Р.Добрушиним, Л.Большевим, С.Сазоновим та багатьма іншими, дружба з якими безумовно сприяла розвитку нашої творчості.

П7: Яка історія теореми Королюка у книжці А.Я.Хінчина?

В7: З осені 1953 р. і до весни 1954 р. я був аспірантом А.Н.Колмогорова в Московському університеті. Відвідуючи лекції А.Я.Хінчина, присвячені теорії масового обслуговування, я запропонував розв'язок проблеми, сформульованої А.Хінциним, про те, що два різні визначення інтенсивності довільного стаціонарного потоку співпадають. При цьому було використано функції Пальма, введені А.Хінциним на

одній з його лекцій. А.Хінчин був задоволений моїм розв'язком цієї проблеми і запропонував підготувати спільну статтю. Це дуже схвилювало мене. Я, звичайно, погодився. Але час мого перебування в Московському університеті закінчувався, і я мав повертатися до Києва для захисту кандидатської дисертації. Роком пізніше (у 1955 р.) розв'язок цієї проблеми був опублікований в монографії А.Хінчина "Математические методы теории массового обслуживания" (Труды математического института имени Стеклова) під назвою "§11. Интенсивность стационарного потока. Теорема Королюка". Це було для мене несподіванкою. Пам'ятаючи свою обіцянку, А.Хінчин дав мені урок наукової етики. Але як я можу посилатися на цей мій результат?

***П8:** Хто з видатних "імовірнісників" і статистиків був у Москві в той час і якими саме проблемами вони займалися?*

В8: Б.Гнеденко - мій Учитель (з великої літери), якому я зобов'язаний за початок мого наукового життя, а згодом і всією моєю науковою кар'єрою. Моя зустріч з Б.Гнеденком в 1949 р. була моєю "зоряною миттю". Крім того, найбільше я використовував ідеї робіт І.Гіхмана і А.Хінчина, особливо книгу останнього "Асимптотические законы теории вероятностей" (1939 р.). Звичайно, я був аспірантом А.Колмогорова протягом деякого часу. Крім того, він опонував на захисті моєї кандидатської дисертації в 1954 р. На жаль, я не можу сказати, що зобов'язаний йому своєю творчою роботою. А.Колмогоров покладався на мене протягом тривалого часу. Наприклад, він запросив мене організувати журнал "Теория вероятностей и ее применения", незважаючи на те, що я жив у Києві, не в Москві.

***П9:** Після того як Ви повернулися до Києва, що Ви робили? Розкажіть також про вашу спільну роботу з Гнеденком і Скороходом.*

В9: Наша спільна творча робота з Б.Гнеденком тривала дуже короткий період: з 1950 р. по 1960 р. Але я використовував ідеї Б.Гнеденка дуже часто у своїх наукових дослідженнях. Наприклад, проблеми надійності було взято зі статті Б.Гнеденка, присвяченої дубльованій стохастичній системі. Узагальнення цієї проблеми привело мене до теорії напівмарковських процесів. Які ми вивчали на нашому семінарі в Інституті математики, використовуючи статті Р.Пайка та Е.Цінлара. На жаль, після того, як Б.В. став професором Московського університету у 1960 р., наші творчі контакти стали нерегулярними (не без "допомоги" Президії АН України). Проте я завжди прагнув обговорювати з Б.В. нові творчі проблеми, що були предметом моїх досліджень разом з моїми учнями. Останньою нашою спільною роботою була підготовка доповіді "Асимптотичні розклади в теорії ймовірностей" до 4 Беркелеєвського Симпозіуму у Сполучених Штатах Америки в 1960 р. У цій роботі брав

участь і А.В.Скороход, який на той час уже створив метод асимптотичного аналізу, що згодом дістав назву "метод одного ймовірного простору".

***П10:** Ми всі знаємо про знамениті семінари Гнеденка. Ми впевнені, що Ви брали в них участь. Чи не могли б Ви щось розказати про них? Хто були відвідувачі цих семінарів?*

В10: Кожне засідання семінару було для нас святом. Ми з захопленням слідували за перебігом думок Б.В., його аналізом проблеми, його глибокою ерудицією. Ми ніколи не відчували, що Б.Гнеденко є знаменитим ученим, академіком і т.ін., він завжди був ввічливим і уважним до всіх учасників семінару. Його людські риси були привабливими і надихали нас. Зазвичай, після семінару ми збиралися разом і йшли (пішки) з Б.Гнеденком до його дому. Дуже часто Б.Гнеденко запрошував своїх кращих студентів додому. Його дружина була дуже уважною до кожного з нас. Кожного першого січня, у день народження Б.Гнеденка, ми обідали з родиною Б.Гнеденка.

***П11:** Протягом цього київського періоду в континентальній Європі розвивалася обчислювальна техніка другого покоління. Якою була ваша роль у цьому? Ви запропонували також нову мову програмування і написали (разом з Б.Гнеденком) книжку з програмування. Як їх сприйняло наукове товариство і яким був їх вплив?*

В11: Мій Вчитель Б.Гнеденко сказав мені, що після повернення з Москви я буду працювати в комп'ютерній (обчислювальній) лабораторії. Так що я мусив вивчити теорію алгоритмів і програмування в Московському університеті. Я відвідував курси лекцій А.Ляпунова, Л.Люстерника та ін. Я готовий був працювати в комп'ютерних науках. Я повинен був читати лекції та вести семінари в Київському університеті, щоб підготувати нове покоління студентів для роботи в обчислювальних лабораторіях. Я повинен був ввести спеціальну мову, щоб пояснити, як саме програмування може бути реалізоване в комп'ютері. Я назвав її "Адресною мовою" (тому що головна ідея полягала у використанні різних позначень для коду (адреси) комірки та змісту комірки). Я міг писати програму комп'ютера в більш-менш абстрактній формі. Результатом було введення адреси другого рангу — позначення для числа, чия адреса міститься в іншій комірці. Я запропонував ввести в новому комп'ютері індексний реєстр, який фіксував індекс у процедурах циклу. Результатом нашої роботи в обчислювальній лабораторії став один із перших підручників у СРСР "Елементи програмування" (автори Б.В.Гнеденко, В.С.Королюк, К.Л.Ющенко), що був виданий у 1961 р. Цю книжку було перекладено німецькою, французькою, угорською та чеською мовами. То був дуже цікавий період - "штурму і натиску". Усі ми жили і працювали

поза Києвом на території монастиря (Феофанія) і проводили разом дуже багато часу: праця, ігри, рибалка, туризм тощо.

П12: *Розкажіть про період, коли Ви очолювали відділ теорії ймовірностей, а Скороход - відділ теорії стохастичних процесів, і особливо про ваші професійні стосунки з ним.*

В12: Обставини були такими, що я очолив відділ теорії ймовірностей й математичної статистики в Інституті математики 1960 р. одразу після того, як Б.Гнеденко залишив Київ. У той же самий час А.Скороход був професором Київського університету. Я порадив йому повернутися до Інституту математики, де була можливість створити новий відділ стохастичних процесів. Після деяких сумнівів А.Скороход прийняв зважене рішення і з 1964 р. він очолив відділ стохастичних процесів. Наслідуючи традиції Б.Гнеденка, ми завжди проводимо спільні семінари в Інституті математики і в Київському університеті. Звичайно, кожен відділ має окремий семінар також.

П13: *Як виникла книжка "Довідник з теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики", виданням якої Ви керували (у співробітництві зі Скороходом, Портенком та ін.)*

В13: На початку 1970-х рр. нове покоління "ймовірнісників" у Москві вибухнуло новими, як навчальними, так і монографічними книгами з теорії ймовірностей та її застосувань. Це надихнуло нас теж щось зробити. У видавництві "Наукова думка" редактор математичної літератури Ю.Г.Бабаніна підказала мені, що було б добре підготувати довідник-посібник із теорії ймовірностей та математичної статистики. Проблема була лише в тому, щоб залучити до цієї роботи А.Скорохода. Ми розділили нашу роботу на чотири частини (не рівні) з М.Портенком та А.Турбінім. Коли я був заступником головного редактора журналу "Теория вероятностей и её применения" (1955-1958 рр.), я мав добрі стосунки з московськими видавництвами "Наука" і "Мир". Я запропонував видавництву "Мир" ширше розповсюдження українського видання довідника. Цей посібник було перекладено французькою та іспанською мовами.

П14: *Протягом вашої видатної академічної кар'єри у Вас було багато учнів. Кого Ви можете назвати з найбільш відомих?*

В14: Я гадаю, що у мене є не тільки учні в прямому розумінні цього слова. Я був причетний до становлення значної кількості "ймовірнісників" в Україні. Наприклад, академіки І.Коваленко і Ю.Єрмольєв, член-кореспонденти В.Анісімов і А.Великий та ін., В.Шуренков також. Але звичайно, я вважаю, що перші два чи більше поколінь "ймовірнісників" в Україні виховані нашим спільним Учителем - Б.Гнеденком.

П15: *Як і коли почалися українсько-скандинавські зустрічі? На Вашу думку, яку роль вони відіграють у розвитку теорії ймовірностей і статистики в обох цих частинах світу?*

В15: Українсько-скандинавську зустріч було проведено з ініціативи професора Г.Кулдорфа (університет Умеа, Швеція) і підтримано енергійними зусиллями професора Д.Сильвестрова і його учня А.Моци (Ужгородський університет). Перша конференція відбулася в 1995 р. в Ужгороді, гарному маленькому місті біля західного кордону України. Професор Г.Кулдорф — дуже відповідальний вчений та організатор. Зразу ж після того, як почалася "перебудова" в нашій країні, він узяв активну участь в організації ефективних контактів між вченими колишнього Радянського Союзу і вченими західних країн. Можливо, він був вражений моїм досвідом: перший раз за кордоном у західній країні, а саме у Швеції, я був у 1990 р. (65 років віку). Гадаю, що ці конференції мали важливу роль, насамперед у збереженні нашої української ймовірнісної школи, тому що дуже багато молодих учених взяли участь у цих конференціях. Наприклад, на останній конференції в Умеа (Швеція) брало участь приблизно 40 осіб з України, з них більше половини — молоді вчені.

П16: *Як Ви гадаєте, чому великий гурт таких видатних "ймовірнісників" в Україні, як Бернштейн, Гнеденко, Банах, Ляпунов, Ви самі, Скороход і багато інших не тільки вийшли з України, а й розквітли як науковці саме в ній?*

В16: Як на мене, то існує багато причин створення математичної школи. Звичайно, передусім необхідно мати талановитого вченого і організатора. Далі - університет із традиційно добре поставленою освітою. І нарешті, "вільне місце" (ніша) для створення нової школи. Є й інші причини, які тут не так легко вказати. Я хотів би звернути увагу, що видатні вчені не обов'язково створюють наукову школу, але Б.Гнеденко був винятком.

П17: *Повертаючись до Вашого особистого життя, розкажіть про час перебування в армії.*

В17: Моя служба в армії - ще один курйоз у моєму житті. Я закінчив навчання в середній школі, коли мені виповнилося 16 років. Так що я почав служити у Радянській армії, коли мені було 17 (1942 р.) замість 18 за законом. Роком пізніше я вже був офіцером у Харківській військовій школі зв'язку. Як строковий офіцер, я мав гарну можливість служити в армії протягом 25 років чи більше. Але я прагнув здійснити мрію мого життя — стати математиком. Два роки (1945-1947 рр.) я був студентом-заочником Харківського університету. Після мого чергового клопотання про демобілізацію несподіваним сюрпризом для мене стала демобілізація

у 1947 р. Я повернувся до Києва і знову став студентом Київського університету, почавши з третього курсу.

***П18:** Про Вашу сім'ю.*

В18: Я одружений вдруге. Моя дружина Ніна Королук (Андрос) — професор Національної музичної академії (раніше консерваторія) у Києві. Нещодавно вона видала свою нову книгу, присвячену видатним українським композиторам, їхньому життю і долі. Наші сини, Дмитро і Володимир, отримали математичну освіту в Київському університеті. Вони — кандидати наук. Живуть за кордоном: Дмитро — в Італії, Володимир — у Канаді. Крім того, маю сина Олега і доньку Наталку від моєї першої дружини. Вони живуть окремо: Олег - у Києві і Наталка - у Львові. У мене багато онуків.

***П19:** Ми знаємо, що протягом кількох років Вашого життя Ви були "persona non grata". Чи не могли б Ви пояснити суть справи?*

В19: Зразу після 1944 р., коли мій батько був засуджений за співробітництво з окупаційним режимом в Києві (він працював агрономом у сільськогосподарській організації в передмісті Києва), я став підозрілою особою з урізаними правами. Я знаходився під підозрою весь час аж до "перебудови". Моє обрання академіком було ненормальною подією. Може тому, що А.Скороход був тоді під ще більшою підозрою, ніж я. Але це інша історія.

***П20:** Чи є у Вас щось, чим би Ви хотіли поділитися з нами, розповісти про якісь свої специфічні публікації?*

В20: Я маю таку драматичну історію в моєму науковому житті, яку хотів би назвати "Приграничні шари в асимптотичному аналізі випадкових блукань". Я підготував статтю з такою назвою, надруковану в журналі "Теорія стохастичних процесів", видавництво ТВ і МС, Київ, у випуску, присвяченому 80-річчю видатного українського вченого Й.Гіхмана (*Boundary layer in asymptotic analysis for random walks, Theory of Stochastic Processes* 4 (20) (1998), no 1-2, 25-36). Кажучи кількома словами, я повинен був відкрити приграничний шар ще у 1954 р., коли побудував асимптотичний розклад для критерію згоди Колмогорова — саме в той час, коли був аспірантом останнього. Але тільки в 1958 р. я дізнався про статтю Вішика та Люстерніка у журналі "Успехи математических наук", яка стала для мене поштовхом до побудови приграничних шарів в асимптотичному аналізі граничних задач для випадкових блукань. І навіть зараз я хотів би продовжувати дослідження цієї проблеми зі своїми учнями.

П21: *Якби Вас повинні були пам'ятати за одну роботу (з усіх Вами виконаних), яка це була б?*

В21: Я волів би, щоб це була гранична теорема, опублікована в моїй першій монографії "Граничні теореми для складних пуассонівських процесів" (Київ, "Наукова думка", 1975), російською мовою, для випадку класичного процесу ризику з неперервним зносом до затримуючого екрана на нульовому рівні та з позитивними довільно розподіленими стрибками. Моментом банкрутства вважається момент першого перевищення позитивного рівня L . Граничний результат залежить від середнього значення зносу за одиницю часу (m), так що є тільки три можливості: i) якщо $m > 0$, то момент першого перевищення задовольняє закон великих чисел; ii) якщо $m = 0$, то нормалізований момент першого перевищення має граничним розподіл моменту першого перевищення для вінерівського процесу з відбиваючим бар'єром на нульовому рівні; iii) якщо $m < 0$, то гранична поведінка моменту першого перевищення за деякої нормалізації описується показниковим розподілом з атомом у нулі. Цей результат може бути поширений на більш загальні випадкові блукання i , на мій погляд, може інтерпретуватися як деякий біологічний закон. Наприклад, електрична активність нейрона існує тільки в трьох різних станах: i) активному стані, коли нейрон емітує імпульси з постійною частотою; ii) хаотичному стані, коли нейрон емітує імпульси за законами вінерівського процесу; iii) живому стані, коли нейрон емітує імпульси з показниково розподіленими інтервалами. Існують і інші інтерпретації цієї граничної теореми для випадкового блукання з затримуючим екраном. Я був натхненний на розв'язання цієї задачі своєю любов'ю до моєї дружини Ніни. Незважаючи на труднощі в нашому житті в 1972-1975 рр., я досліджував цю проблему з великим ентузіазмом та був винагороджений. "Потенціал" і "резольвента" випадкового блукання, наведені в моїй монографії, є загальними функціоналами випадкового блукання, які можуть використовуватися для представлення різних видів граничних функціоналів.

П22: *Завершуючи це інтерв'ю, ми повинні поставити Вам запитання, яке, ми впевнені, з'явиться у багатьох його читачів: "Коли нинішня економічна ситуація в Україні (і в Росії) знаходиться в такому кризовому стані, спонукаючи багатьох видатних науковців до міграції в західні країни, яким Ви бачите майбутнє теорії ймовірностей і статистики у вашій країні?"*

В22: Я впевнений, що імовірнісна школа в Україні буде збережена. Це тому, що ми маємо чудову можливість відбирати кращих студентів з Київського університету та інших університетів України. Дуже багато молодих професорів, які працюють у Києві, Донецьку, Харкові, Львові та інших містах, мають гарні можливості відібрати найкращих студентів.

Я хотів би згадати члена-кореспондента нашої Академії наук професора М.Ядренка, який був завідувачем кафедри теорії ймовірності й математичної статистики Київського національного університету протягом багатьох років. Він був видатним професором із божої ласки. Завдяки йому ми мали невичерпне джерело молодих статистиків та "ймовірнісників". І, певна річ, — нові відкриті зв'язки з різними науковими центрами Європи, США та інших країн. Все це дає мені серйозну причину бути оптимістом щодо майбутнього нашої ймовірнісної школи.

Ми щиро дякуємо Вам за те, що Ви взяли нас обох (а також читачів) у подорож у часі, який, безперечно, був золотою епоєю ймовірності й статистики не тільки в колишньому Радянському Союзі, а й у всьому світі також.

McMaster's University, Canada

Електронна адреса: bala@mcmail.cis.mcmaster.ca

Université de Technologie de Compiègne, France

Електронна адреса: Nicolaos.Limnios@utc.fr

Ukrainian National Academy of Science, Ukraine

Надійшла 16.04.2001

Часть 2. Комментарии

Погранслои

Непараметрические статистики Колмогорова. Эмпирический процесс. Мы уже обсуждали проблему асимптотического анализа распределений статистик Колмогорова и Смирнова. Эта проблема сводится к асимптотическому анализу случайных блужданий в бернуллиевой или пуассоновской схемах при дополнительных граничных условиях, которые в случае непараметрических статистик означают условия поглощения. Хорошо известно, что первые предельные результаты для таких схем блужданий с граничными условиями были получены А.Н.Колмогоровым и А.Я.Хинчиным и обоснованы методом верхних и нижних функций.

Проблема коренным образом меняется при построении асимптотических разложений для статистических распределений. Проще всего это понять на примере задачи о разорении для сложного пуассоновского процесса со сносом. Пусть

$$\eta_\varepsilon(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon^2) - ct/\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

- нормированный процесс Пуассона $v(t)$, $t \geq 0$, с параметром $a > 0$. Известно, что при $a=c=1$ распределение статистики Колмогорова

$$D_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} |F_n(t) - t|, \quad (2)$$

где $F_n(t)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$, представимо в следующем виде ($\varepsilon = 1/n$):

$$D_n = \{|\eta_\varepsilon(t)| < z \mid \eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon(1) = 0\}. \quad (3)$$

Для построения асимптотического разложения по степеням ε "расширим" задачу. Введем момент поглощения

$$\tau_\varepsilon = \min\{t : \eta_\varepsilon(t) \geq z\} \quad (4)$$

и совместное распределение процесса (1) и (4)

$$u_\varepsilon(t, x) = P\{\eta_\varepsilon(t) = x, \tau_\varepsilon > t \mid \eta_\varepsilon(0) = 0\}, \quad (5)$$

здесь, $x = \varepsilon k - t/\varepsilon$, $k \geq 0$.

Тогда распределение статистики Колмогорова (3) представимо в виде

$$K_n(z) = u_\varepsilon(1, 0) / P_\varepsilon(1, 0) \quad (6)$$

$$P_\varepsilon(t, x) := P\{\eta_\varepsilon(t) = x \mid \eta_\varepsilon(0) = 0\} \quad (7)$$

Так что, имея асимптотические разложения для распределений (6) и (7), можно получить искомое асимптотическое разложение для статистики Колмогорова.

Совместное распределение (5) определяется решением граничной задачи для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial t} = \varepsilon^{-2} a[u_\varepsilon(t, x+\varepsilon) - u_\varepsilon(t, x)] - \varepsilon^{-1} c \frac{\partial u_\varepsilon(t, x)}{\partial x} \quad (8)$$

с граничными условиями поглощения.

Нессиметрия граничных условий для нижнего $(-z)$ и

$$u_\varepsilon(t, -z) = 0, \quad u_\varepsilon(t, z+x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon. \quad (9)$$

верхнего $(+z)$ уровней объясняется тем, что нижний уровень $-z$ нормированный процесс Пуассона (1) достигает непрерывным образом за счет непрерывности снизу процесса (1), а верхний уровень $+z$ достигается скачком Пуассоновского процесса величиной ε .

В 1953 году, следуя идеям построения асимптотических разложений, развитым в работах А.Я.Хинчика и И.И.Гихмана (без граничных условий!), я не представлял себе трудностей, связанных с наличием граничного условия в слое! Беседы с А.Н.Колмогоровым не прояснили ситуацию, быть может, потому, что я не понимал намеков Андрея Николаевича, а быть может, Андрей Николаевич не вдумался в эту проблему настолько, чтобы подсказать мне необходимый инструмент анализа.

Только после того, как я обнаружил, что проблема сводится к построению дополнительных членов асимптотики типа "погранслоя", я нашел работу М.И.Вишика и Л.А.Люстерника [УМН, 1957], в которой с исчерпывающей ясностью и полнотой изложена процедура построения погранслоев в граничных задачах для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Однако для дифференциально-разностного уравнения (8) алгоритм Вишика - Люстерника непригоден.

Поиски погранслоя. Тут я должен вернуться к событиям, связанным с обнаружением погранслоя в граничной задаче (8) - (9). Не подозревая о необходимости построения дополнительных членов асимптотики типа погранслоя в задаче (8) - (9), я получил асимптотическое разложение для статистики Колмогорова в неполном виде. Китайский математик Чжан-Ли-Цянь построил первые два члена асимптотики для распределения статистики Колмогорова, используя явное выражение для распределения. Результат был получен благодаря виртуозной аналитической технике автора. А.Н.Колмогоров сообщил мне об этой работе и просил объяснить расхождение в наших результатах.

Это было в разгар нашей "компьютерной" жизни в Феофании (1956-1958 год). Работа Чжан-Ли-Цяня повергла меня в шоковое состояние. Я не представлял себе, откуда я могу взять недостающие члены асимптотики.

Тогда я начал анализ простейшего решетчатого случайного блуждания на отрезке с ограниченными скачками. Извлекая точное решение граничной задачи из разностного уравнения, я обнаружил составляющие члены типа погранслоя. Это было на заре зарождающегося летнего дня. В радостном возбуждении я побежал на опушку

феофанийского леса, где колосилась золотистая пшеница, и плакал от счастья собственной находки.

Эх, мне бы обнаружить погранслою в 1954 году! Да и сейчас это еще не настоящий успех. Кустарно извлеченный погранслою в простом примере это еще не метод. И здесь меня осенило. Я вспомнил, что, просматривая бегло Доклады АН СССР, я когда-то прочитал заметку М.И.Вишика и Л.А.Люстерника, анонсирующую алгоритм построения погранслоя. Только тогда я понял, как называются мои дополнительные члены асимптотики: "Погранслою". С душевным трепетом я еду в Киев, беру в библиотеке журнал "Успехи математических наук", 1957 год, вып.5, в котором опубликована большая статья М.И.Вишика и Л.А.Люстерника и, предвкушая радость открытия метода не раскрывая журнала, иду на всегда любимую мной Владимирскую горку, выбираю уединенное место с видом на Заднепровье и погружаюсь в статью М.И.Вишика и Л.А.Люстерника. Предчувствие меня не обмануло. Это в точности то, что мне требуется. Только с существенной поправкой. Погранслою в граничных задачах для случайных блужданий в работах М.И.Вишика и Л.А.Люстерника нет. Его надо построить, учитывая специфику производящего оператора марковского процесса, задающего случайное блуждание.

Факторизация производящего оператора. И здесь, снова существенную роль сыграло Провидение. Я вспомнил, что в том же журнале "Успехи математических наук" только в другом номере, 1958 г., вып. 5, напечатана большая статья М.Г.Крейна об интегральных уравнениях на полуоси, в которой с исчерпывающей полнотой завершено построение общей теории таких уравнений, основанное на идее факторизации символа оператора, задающего уравнение. А это как раз мне и надо. Но прежде, по поводу провидения. Это только так говорится. А на самом деле к встрече с провидением надо быть всегда готовым. Копить знания, иногда бесполезные в данный момент. И тогда лишь Провидение не ускользнет призраком.

Итак, мне надо факторизовать символ оператора, определяющего правую часть уравнения (8), предварительно избавившись от малого параметра ε , что можно сделать, рассматривая этот оператор на функциях типа погранслоя $V(z-(x/\varepsilon))$. В результате получаем оператор (для простоты полагаем $a = c = 1$):

$$PV(x) := \frac{dV(x)}{dx} + V(x-1) - V(x), \quad (10)$$

символ которого

$$P(\lambda) = \lambda + e^{-\lambda} - 1, \quad (11)$$

обращается в нуль (кратности 2) в точке $\lambda = 0$. Так что

$$P(\lambda) = \lambda^2 P_0(\lambda) \quad P_0(\lambda) = (\lambda + e^{-\lambda} - 1) / \lambda^2, \quad (12)$$

и легко удостовериться, что символу $P_0(\lambda)$ соответствует интегральный оператор

$$PV(x) := \int_0^1 (1-y)V(x-y)dy. \quad (13)$$

Следовательно, исходный оператор (10) факторизуется следующим образом:

$$P = \frac{d^2}{dx^2} P_0. \quad (14)$$

Встреча с М.Г.Крейном. Заметим, что в граничных задачах для случайных блужданий символ оператора всегда имеет нуль на вещественной оси. А значит, общая теория Крейна при решении таких задач не применима. Удостоверившись в этом, я пишу заметку в "Доповіді АН України" (III — 39, 1962) с описанием алгоритма построения уравнения для погранслоя, и прошу редакцию показать эту заметку М.Г.Крейну для рецензии. Последовала незамедлительная его реакция: "В статье, опубликованной в журнале "Успехи математических наук", теория интегральных уравнений на полуоси изложена с исчерпывающей полнотой".

Я договорился с Марком Григорьевичем о выступлении на его семинаре в Одессе. Это было, конечно, серьезное испытание для меня. Но зато я, можно сказать, заручился поддержкой М.Г.Крейна на все остальное время. А эта поддержка оказалась очень кстати, когда, например, мне надо было получить отзыв оппонента М.И.Вишика на мою докторскую диссертацию.

Построение неоднородного погранслоя. Уравнение для погранслоя (13) необычно тем, что решение этого уравнения требуется определить на положительной полуоси $x \geq 0$, при заданных значениях функции $V(x)$ — на отрицательной полуоси $x < 0$, да еще при дополнительном граничном условии, характеризующим погранслойный характер решения на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0. \quad (15)$$

Для построения последующих членов асимптотики задача выглядит следующим образом:

$$\int_0^1 (1-y)V(x-y)dy = W(x), \quad x \geq 0, \quad (16)$$

$$V(x) = V_0 + V_0(x), \quad x \leq 0. \quad (17)$$

Функции $W(x)$ и $V_0(x)$ заданы. Остается выяснить значение константы $V_0 = V(0)$. Желательно, чтобы $V_0 = 0$, но этого как раз нельзя предполагать. Оказывается, что константа V_0 определяется однозначно дополнительным условием (15). Это легко можно понять, записав уравнение (16) в форме Вольтерра:

$$\int_0^x (1-y)V(x-y)dy = W(x) - \int_x^1 (1-y)V(x-y)dy. \quad (18)$$

Подставляя в правую часть граничное условие (17), получаем уравнение, разрешимое в виде преобразования Лапласа, из которого константа V_0 определяется при помощи соотношения

$$V_0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} W_1(\lambda)/P_0(\lambda). \quad (19)$$

Проблема разорения. Я увлекся описанием процедуры построения погранслоя, оставив без внимания существенный вопрос: "А зачем нужен погранслои?" По-видимому, ответ на это вопрос проще всего получить в асимптотическом анализе задачи о разорении. Рассмотрим случайное блуждание на отрезке $[0, a]$, определяемое суммами независимых и одинаково распределенных величин ξ_k , $k \geq 1$, с заданной функцией распределения

$$P(x) = P\{\xi_k \leq x\}, \quad x \in R = (-\infty, +\infty),$$

$$\eta_n = \eta_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1. \quad (20)$$

Введем момент разорения:

$$\tau := \min\{n: \eta_n \notin [0, a] | \eta_0 \in (0, a)\}. \quad (21)$$

Легко понять, что вероятность разорения

$$u(x) = P\{\eta_\tau \leq 0 | \eta_0 = x\}, \quad x \in (0, a) \quad (22)$$

определяется решением следующей граничной задачи ("второй проблемы диффузии" в терминологии А.Я.Хинчина):

$$u(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x+y)dP(y) = 0, \quad x \in (0, a), \quad (23)$$

при дополнительных граничных условиях

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x \geq a. \end{cases} \quad (24)$$

Хорошо известно решение этой задачи в явном виде для бернуллиевого случайного блуждания со скачками ± 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Разностное уравнение 2-го порядка для вероятности разорения приводит к следующему результату

$$u(x) = (\rho^x - \rho^a)/(1 - \rho^a), \quad \rho = q/p. \quad (25)$$

Для симметричного случайного блуждания с $p = q = 1/2$, получаем

$$u(x) = 1 - x/a, \quad x \in [0, a]. \quad (26)$$

Для произвольной функции распределения граничная задача (23) - (24), вообще говоря, не имеет явного аналитического решения. Впрочем, существует очень важный класс случайных блужданий — полунепрерывные (снизу или сверху), для которого задача о разорении имеет удивительно простое решение, допускающее асимптотический анализ.

В асимптотическом анализе задачи о разорении рассматривается схема серий с малым (весьма удобно и традиционно) параметром серии $\varepsilon > 0$ в следующем виде:

$$P_\varepsilon u_\varepsilon(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} [u_\varepsilon(x + \varepsilon y) - u_\varepsilon(x)] dP(y) = 0, \quad x \in (0, a) \quad (27)$$

При дополнительных граничных условиях

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Конечно, с учетом граничных условий (28) интегральное уравнение (27) можно было бы рассматривать на интервале $(0, a)$. Но вот этого как раз делать не должно!

Опытный исследователь знает, что всегда существуют тупиковые пути анализа проблемы, даже среди тех, которые, казалось бы, логически целесообразны. Мне представляется, что в то же время существует "адекватный" в определенном смысле этого слова, путь решения проблемы. Как раз выбор его и есть творческим процессом ученого. Конечно, к цели могут вести различные пути, как и дороги земные и житейские, но "Есть, есть божий суд!"... И все-таки наиболее эффективный, и при этом экономный, и даже эстетически красивый путь решения той или иной проблемы всегда существует. Это подтверждается опытом выдающихся ученых: например, Эйнштейн всегда считал, что природа предпочитает экономные (думаю, в вариационном смысле) пути развития. А то, что эстетическая оценка должна быть главенствующей в сравнении разных теорий, методов, моделей — это ни у кого не вызывает сомнения.

Погранслои в задаче о разорении. Будем рассматривать граничную задачу (27)-(28) на всей вещественной оси $R = (-\infty + \infty)$. И будем искать решение этой задачи в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots \quad (29)$$

Рассмотрим исходный оператор P_ε , задающий уравнение (27), на достаточно гладкой функции $u(x)$, заданной на всей вещественной оси. Предполагая (для простоты), что $E\xi_k = 0$, получаем асимптотическое представление исходного оператора в виде:

$$\varepsilon^{-2} P_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \dots \quad (30)$$

в котором

$$L_0 u(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2}, \quad L_1 u(x) = m_3 \frac{d^3 u}{dx^3}, \dots \quad (m_3 := E\xi_i^3).$$

Подставляя ряд (29) в разложение (30), и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε , получаем рекуррентную систему дифференциальных уравнений для регулярных членов асимптотического разложения (29):

$$L_0 u_0 = \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad L_0 u_1 = -L_1 u_0, \quad \dots \quad (31)$$

Остается проблема выбора граничных условий для членов асимптотики $u_k(x)$, $k \geq 0$. С учетом исходного граничного условия (28) очевиден выбор граничных условий для нулевого члена асимптотики:

$$u_0(0)=1, \quad u_0(a)=0. \quad (32)$$

Поскольку исходная вероятность разорения $u_\varepsilon(x)$ также удовлетворяет этим условиям (ср. (28) и (32)), то представляется естественным выбор граничных условий для остальных членов асимптотики (29) в виде

$$u_k(0)=u_k(a)=0, \quad k \geq 1.$$

Здесь мы допускаем грубый просчет в анализе проблемы о разорении. Вспомним, что вероятность разорения $u_\varepsilon(x)$ вне интервала $(0, a)$ принимает заданные значения (28). А регулярные члены асимптотики (29) определяются решениями (31) внутри интервала $(0, a)$ с дополнительным (очень важным!) предположением *гладкого продолжения* (!) вне отрезка $[0, a]$. Такое продолжение вовсе не обязано удовлетворять граничному условию (28). Да это и так совершенно очевидно, если принять во внимание уравнения (31).

Значит регулярных членов асимптотики (29) недостаточно в асимптотическом анализе граничной проблемы (27)-(28). Надо искать дополнительные члены асимптотики, компенсирующие невязки в граничных условиях (28), которые возникают при гладком продолжении регулярных членов за пределы отрезка $[0, a]$. Такими членами асимптотики и являются *погранслои* - именно те функции, которые и компенсируют невязки вне области анализа и исчезающе малы внутри этой области.

В работах М.И.Вишика и Л.А.Люстерника, вызванных многочисленными исследованиями по проблемам механики, с исчерпывающей ясностью продемонстрировано, как появляется погранслои в задаче асимптотического анализа дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Происходит вырождение граничных условий в граничных точках. Недостающие значения старших производных компенсируются значениями соответствующих производных погранслоев. При этом возникает невязка в граничных значениях младших производных, которая, в свою очередь, компенсируется последующими регулярными членами асимптотики и так далее.

Проблема разделения двух асимптотических процедур. Здесь возникает естественная проблема. Влияние погранслоя внутри области незначительное, так что ими можно пренебречь. Тогда возникает вопрос, нельзя ли разделить два асимптотических процесса построения

регулярных и погранслоиных членов. Иначе говоря, как определить граничные значения регулярных членов с учетом невязки погранслоев, но без необходимости построения самих погранслоев. В задачах, рассматриваемых М.И.Вишиком и Л.А.Люстерником, может быть эта проблема и выглядит не так актуально, так как и регулярные, и погранслоиные члены определяются, по существу, уравнениями одинакового типа. В граничных задачах для случайных блужданий, как будет видно в дальнейшем, погранслои определяются, вообще говоря, существенно более сложными уравнениями, явное решение которых порой представляется проблематичным.

Как говорится, хорошая постановка задачи - полдела. Выполнив ряд несложных преобразований, связанных с применением преобразования Лапласа на полуоси после применения тауберовой теоремы, связывающей значение преобразованной функции в нуле с ее преобразованием на бесконечности, алгоритм, разделяющий два асимптотических процесса построения регулярных и погранслоиных членов асимптотики, был построен. Как раз в это время в нашем отделе появилась выпускница Киевского университета, помогавшая мне с выкладками, так что статья с модифицированным алгоритмом М.И.Вишика и Л.А.Люстерника была опубликована в том же журнале "Успехи математической науки", что и результаты М.И.Вишика и Л.А.Люстерника. К сожалению, эта заметка прошла незамеченной, так как после нее появилась новая работа М.И.Вишика и Л.А.Люстерника, также с модифицированным алгоритмом, но без учета возможности разделения двух процессов.

Но опубликовать работу — этого еще недостаточно для ее признания. Необходимо привлечь к ней внимание как можно большего числа специалистов, работающих в этой же области. Простейший способ — посылать оттиски коллегам по проблеме. К сожалению, у нас этот очевидный прием заинтересовать, обратить внимание на работу не часто используется. А жаль!

Регулярная асимптотика в задаче о разорении. Вернемся к рассматриваемой проблеме о разорении (27)-(28). Где искать погранслои в этом уравнении? Конечно же, в факторизации оператора

$$PV(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(z+y)dP(y) - V(z).$$

При естественных дополнительных условиях, в том числе, предполагая, что средняя величина скачка равна нулю $E\xi_k = 0$, искомая факторизация выглядит следующим образом:

$$P = \frac{d^2}{dz^2} P_+ \cdot P_-, \quad (34)$$

где операторы задаются так:

$$P_{\pm}V(z) = \int_0^{\infty} V(z-y)P_{\pm}(y)dy. \quad (35)$$

При этом ядра $P_{\pm}(y)$ имеют простой вероятностный смысл: это плотности распределения предельных величин перескока через удаляющийся уровень на $\pm \infty$.

Как и в случае пуассоновского процесса со сносом, граничные задачи для погранслоев выглядят следующим образом. Надо определить решение интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} V(z-y)P(y)dy = W(z), \quad z \geq 0 \quad (36)$$

на полуоси $z \geq 0$, при заданных значениях погранслоя $V(z)$ для $z \leq 0$:

$$V(z) = V_0 + V_0(z), \quad z \leq 0, \quad (37)$$

при дополнительном условии поведения погранслоя на $+\infty$:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V(z) = 0. \quad (38)$$

Этим дополнительным условием и определяется значение погранслоя в нуле V_0 . В итоге, алгоритм построения асимптотического разложения для вероятности разорения (22) имеет следующий вид:

$$u_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[v_k^{-}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + v_k^{+}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) \right].$$

Решая аналитическую проблему построения погранслоя и используя теорию интегральных уравнений на полуоси, мы неизбежно приходим к проблеме факторизации характеристической функции и ее применениям в граничных задачах для случайных блужданий.

С использованием алгоритма по разделению двух процессов, построения регулярных и погранслойных членов, представляется возможным полностью построить ряд регулярных членов, определяемых уравнениями (31). Если же учесть, что нулевой член асимптотики $u_0(x) = 1 - x/a$ линейно зависит от x , то легко понять, что и все последующие регулярные члены имеют такой же вид: $u_k(x) = A_k + B_k x$, $k \geq 1$.

Так что остается только определить значение констант A_k и B_k , точнее, граничные значения $u_k(0)$ и $u_k(a)$ из очевидных соотношений

$$u_k(0) + v_k^{-}(0) = 0, \quad u_k(a) + v_k^{+}(a) = 0 \quad (39)$$

В результате ряд из регулярных членов асимптотики оказывается сходящимся. Регулярная часть вероятности разорения выглядит следующим образом:

$$u^{\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) = A_{\varepsilon} - B_{\varepsilon} x/a, \quad (40)$$

$$A_{\varepsilon} = 1 - \varepsilon m_{-}/(1 + \varepsilon m) \quad B_{\varepsilon} = 1/(1 + \varepsilon m), \quad (41)$$

$$\text{здесь } m_{\pm} := \int_0^{\infty} y P_{\pm}(y) dy, \quad m := m_{+} + m_{-}.$$

Для вероятности разорения $u_{\varepsilon}(x)$ получаем асимптотическое представление

$$u_\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) + o(\varepsilon^N), \quad (42)$$

которое имеет смысл внутри каждого замкнутого отрезка, содержащегося в интервале $(0, a)$. При этом оценка $o(\varepsilon^N)$ верна при любом фиксированном значении числа $N > 0$:

$$\sup_{0 < c_0 \leq x \leq c_1 < a} [u_\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x)]/\varepsilon^N \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (43)$$

Только вблизи граничных точек 0 и a следует учитывать влияние членов асимптотики типа погранслоя.

Мне, прошедшему все этапы построения асимптотических разложений в граничных задачах для случайных блужданий, соответствующие алгоритмы выглядят вполне обозримыми. Однако я не могу похвалиться учениками, которые развивали бы эти алгоритмы или хотя бы их использовали. Правда, совместные работы имеются, и даже защищались кандидатские диссертации. Но это, как говорится, "с поводырем".

Вероятность поглощения марковского процесса. Совершенно другой смысл имеет погранслоя в задаче построения асимптотического разложения для распределения момента поглощения марковского процесса.

Рассмотрим марковский процесс $\eta_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, в схеме серий, с малым параметром серии $\varepsilon > 0$, в фазовом пространстве

$$E = E_0 \cup \{0\}, \quad E_0 = \{1, 2, \dots, N\} \text{ с производящей матрицей} \\ Q_\varepsilon = Q_0 + \varepsilon Q_1. \quad (44)$$

Здесь: Q_0 — производящая матрица эргодического марковского процесса $\eta_0(t)$ в фазовом пространстве E_0 со стационарным распределением $\pi = (\pi_k, k \in E_0)$. Матрица возмущений Q_1 такова, что исходный процесс $\eta_\varepsilon(t)$ с положительной вероятностью, стремящейся к нулю вместе с $\varepsilon \rightarrow 0$, поглощается в точке 0.

Введем момент поглощения

$$\tau_\varepsilon = \min\{t: \eta_\varepsilon(t) = 0\}, \quad \eta_\varepsilon(0) \in E_0 \quad (45)$$

и вектор-функцию распределений вероятностей поглощения

$$u^\varepsilon(t) = (u_k^\varepsilon(t), k \in E_0), \quad u_k^\varepsilon(t) = P\{\tau_\varepsilon \geq t | \eta_\varepsilon(0) = k\}. \quad (46)$$

Нетрудно убедиться, что распределение (46) является решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$du^\varepsilon(t)/dt = [\varepsilon^{-1}Q_0 + Q_1]u^\varepsilon(t), \quad u^\varepsilon(0) = 1, \quad (47)$$

с сингулярно возмущенным оператором (в данном случае — матричным) $L^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q_0 + Q_1$. Сингулярность возмущения означает, что оператор Q_0 имеет нетривиальное нуль-пространство. Более того, оператор Q_0 нормально разрешим: банахово пространство векторов B_{E_0} $\otimes$ с $\sup$ -нормой представимо в виде прямой суммы

$$B_{E_0} = N_{E_0} \oplus R_{E_0}. \quad (48)$$

$N_{E_0} := \{\varphi: Q_0\varphi = 0\}$ — подпространство нулей оператора Q_0 ;
 $R_{E_0} := \{\varphi: Q_0\varphi = \psi\}$ — подпространство значений оператора Q_0 .

Проектор Π на нуль-пространство N_{E_0} задается стационарным распределением:

$$\Pi\varphi = \phi 1, \quad \phi := \sum_{k \in E_0} \pi_k \varphi_k, \quad 1 = (1, \quad k \in E_0). \quad (49)$$

Легко установить структуру матрицы Π (упражнение).

Существует обширная литература, посвященная асимптотическому анализу уравнения типа (47). Замечательный факт состоит в том, что каждая проблема сингулярного возмущения производящего оператора марковского процесса имеет соответствующую вероятностную интерпретацию в асимптотическом анализе стохастических систем.

В данной задаче о поглощении марковского процесса мы рассмотрим процедуру построения погранслоев.

В соответствии с общей схемой построения асимптотических разложений для сингулярно-возмущенной задачи, искомое решение задачи (47) представимо в виде асимптотического ряда

$$u^\varepsilon(t) = u^0(t) + \varepsilon u^1(t) + \dots + \varepsilon v(t/\varepsilon) + \dots \quad (50)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (47) и приравнявая члены с одинаковыми степенями ε , получаем две рекуррентных системы уравнений:

$$Q_0 u^0(t) = 0, \quad Q_0 u^k(t) = du^{k-1}(t)/dt - Q_1 u^{k-1}(t), \quad k \geq 1. \quad (51)$$

Для погранслоев — в виде

$$\frac{dV^1(t)}{dt} - Q_0 V^1(t) = 0, \quad \frac{dV^k(t)}{dt} - Q_0 V^k(t) = Q_1 V^{k-1}(t), \quad k \geq 2 \quad (52)$$

Начальные условия задачи Коши (47) дают очевидные соотношения:

$$u^0(0) = 1, \quad u^k(0) + v^k(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (53)$$

Прежде всего, давайте проясним ситуацию: зачем нужен погранслоем в этой задаче. Никакого продолжения регулярных членов за пределы рассматриваемой области значений аргумента нет, как в предыдущей задаче о разорении. Здесь возникают другие обстоятельства. А именно, уравнение (51) для нулевого члена асимптотики $u^0(t) = C_0(t)$, где $C_0(t)$ — скалярная функция, для определения которой негде искать уравнения (?). Заглянем поглубже! Рассмотрим уравнение (51) для следующего регулярного члена асимптотики $u^1(t)$. Решение задачи (51) для $u^1(t)$ возможно только при условии, что правая часть уравнения принадлежит пространству значений R_{Q_0} оператора Q_0 , или, что тоже самое, вектор $du^0(t)/dt - Q_1 u^0(t)$ ортогонален подпространству нулей N_{Q_0} .

Так что условия разрешимости уравнения (51) для следующего

регулярного члена асимптотики дает нам уравнение для *предыдущего* регулярного члена асимптотики, — в данном случае для скалярной функции $C_0(t)$ — в виде задачи Коши

$$dC_0(t)/dt - qC_0(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad C_0(0) = 1. \quad (54)$$

Константа q определяется соотношением

$$q\Pi = \Pi Q_1 \Pi. \quad (55)$$

Пойдем дальше и рассмотрим уравнение для первого регулярного члена асимптотики $u^1(t)$:

$$Q_0 u^1(t) = du^0(t)/dt - Q_1 u^0(t). \quad (56)$$

Теперь решение задачи (56) состоит из двух составных:

$$u^1(t) = u_0^1(t) + C_1(t)1, \quad (57)$$

Составляющая $u_0^1(t) \in R_{Q_0}$ дает частное решение задачи (56), которое существует благодаря условию разрешимости (54); а скалярная функция $C_1(t)$ должна определяться уравнением, которое служит условием разрешимости для следующего уравнения (51). Значит, ситуация такова, что начальный вектор регулярного члена асимптотики

$$u^1(0) = (I - \Pi)u^1(0) + \Pi\Pi(0) \quad (58)$$

представим в виде суммы двух компонент. Компонента $u_0^1(0) = (I - \Pi)u^1(0)$ определяется начальным значением частного решения $u_0^1(0)$, которым мы не вправе распорядиться. Для второй компоненты $C_1(0)$ в нуль-пространстве N_{Q_0} у нас имеется очевидное условие $C_0(0) = 1$.

Вспомним начальные условия для членов асимптотики (53). Без погранслоя нам не обойтись, так как $u^1(0)$ заведомо не обращается в нуль в подпространстве значений R_{Q_0} .

Теперь приступим к построению первого погранслоя $V^1(t)$. Общее решение однородного уравнения (52) представимо в виде

$$V(t) = \exp[tQ_0]V^0, \quad (59)$$

где $V^0 = V(0)$ — начальный вектор. Для эргодического марковского процесса с производящим оператором Q_0 существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[tQ_0] = \Pi. \quad (60)$$

Так что, решение уравнения (52) типа погранслоя, т.е. исчезающее на бесконечности, представимо в виде

$$V^1(t) = [e^{tQ_0} - \Pi]V^0 =: e_0^{tQ_0}V^0. \quad (61)$$

Теперь получаем следующее представление начального вектора для первого погранслоя:

$$u_0^1(0) + V^1(0) = 0,$$

или, иначе,

$$V^0 = u_0^1(0). \quad (62)$$

Здесь мы попутно установили регулярность вырождения исходной задачи Коши (4), по крайней мере, для первых членов асимптотики. Напомню, что регулярность вырождения означает возможность компенсировать невязку регулярных членов асимптотики при помощи погранслойных членов.

Сложнее выглядит процедура построения неоднородных погранслоев, определяемых уравнением (52) при $k \geq 2$. Общее решение неоднородного уравнения (52) представимо в виде

$$e^{tQ_0} V^k + \int_0^t e^{(t-s)Q_0} Q_1 V_{(s)}^{k-1} ds.$$

Чтобы из этой заготовки извлечь погранслой надо, во-первых, заменить экспоненту

$$e^{tQ_0} \text{ на функцию } e_0^{tQ_0} = [e^{tQ_0} - P],$$

а во-вторых, вычесть из второго слагаемого его предел на бесконечности.

В результате неоднородный погранслой представим в виде:

$$V^k(t) = e_0^{tQ_0} V^k + \int_0^t e_0^{(t-s)Q_0} Q_1 V^{k-1}(s) ds - P \int_t^\infty Q_1 V^{k-1}(s) ds;$$

Теперь вычисляем начальный вектор

$$V^k(0) = (I - P)V^k - P \int_0^\infty Q_1 V^{k-1}(s) ds. \quad (63)$$

Компонента начального вектора погранслоя в нуль-пространстве задается предыдущим погранслоем, а компонента в подпространстве значений $(I-P)V^k$ может быть выбрана произвольно. Вместе с тем, в соответствии с представлением регулярных членов асимптотики решениями уравнений (51), начальный вектор в нуль-пространстве "свободен", а в подпространстве значений — задан. Для наглядности представим рассматриваемую ситуацию в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{l} u^k(0) = \underbrace{(I - P)u^k(0)}_{\text{задан}} + \underbrace{Pu^k(0)}_{\text{свободен}} \\ V^k(0) = \underbrace{(I - P)V^k(0)}_{\text{свободен}} + \underbrace{PV^k(0)}_{\text{задан}} \end{array}$$

Таким образом, стыковка начальных условий $u^k(0) + V^k(0) = 0$ возможна при любом $k \geq 1$.

Регулярность вырождения асимптотической задачи (47) имеет место без всяких дополнительных предварительных условий!

Поистине, не мы создаем решение проблем, а лишь находим его в лабиринте хорошо поставленной задачи.

Вероятность поглощения полумарковского процесса. Как проблема построения погранслоя, так и проблема регулярности вырождения существенно изменяются в задаче о поглощении полумарковского процесса. Теперь, как и в предыдущем пункте,

полумарковский процесс $\eta_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, рассматривается в фазовом пространстве $E = E_0 \cup \{0\}$, с единственным поглощающим состоянием 0 и конечным

$$E_0 = \{1, 2, \dots, N\}$$

Теперь распределение вероятностей (46) задается решением уравнения марковского восстановления (УМВ)

$$u^\varepsilon(t) - \int_0^{t/\varepsilon} Q^\varepsilon(ds) u^\varepsilon(t - \varepsilon s) = \bar{G}(t/\varepsilon), \quad t \geq 0. \quad (64)$$

Далее будем предполагать (для простоты), что полумарковское ядро представимо в виде

$$Q^\varepsilon(t) = [Q_{ij}^\varepsilon(t) = P_{ij}^\varepsilon G_i(t), \quad i, j \in E],$$

где $G_i(t) = (G_i(t), \quad i \in E_0)$ — функции распределения времени

пребываний в состояниях из E_0 . Матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова представима в виде:

$$P^\varepsilon = P_0 - \varepsilon P_1. \quad (65)$$

Здесь: $P_0 = [P_{ij}, \quad i, j \in E_0]$ — матрица переходных вероятностей цепи Маркова в E_0 со стационарным распределением $\rho = (\rho_i, \quad i \in E_0)$; матрица возмущений $P_1 = [q_{ij}, \quad i, j \in E_0]$ обеспечивает поглощение полумарковского процесса в состоянии 0. Так что

$$P_{i0}^\varepsilon = 1 - \sum_{j \in E_0} P_{ij}^\varepsilon = 1 - \sum_{j \in E_0} p_{ij} + \varepsilon \sum_{j \in E_0} q_{ij} =: \varepsilon q_{i0}. \quad (66)$$

Для того, чтобы подготовить УМВ (64) для асимптотического анализа, воспользуемся очевидным начальным условием $u^\varepsilon(0) = 1$ и продолжим его на всю отрицательную полуось:

$$u^\varepsilon(t) = 1, \quad t \leq 0. \quad (67)$$

Теперь УМВ (64) преобразуется к виду

$$u^\varepsilon(t) - \int_0^\infty Q^\varepsilon(ds) u^\varepsilon(t - \varepsilon s) = \varepsilon q \bar{G}(t/\varepsilon), \quad (68)$$

где вектор $q \bar{G}(t/\varepsilon) = (q_i \bar{G}_i(t/\varepsilon), \quad i \in E_0)$.

Как раз УМВ (68) вместе с граничным условием (67) и служит исходным объектом асимптотического анализа распределения вероятности поглощения полумарковского процесса.

Теперь необходимо построить два асимптотических разложения оператора $I - Q^\varepsilon$, задающего уравнение (68) по степеням ε . Эти разложения определяют рекуррентные системы уравнений для регулярных и погранслойных членов асимптотики. Разложение для регулярных членов асимптотики (гладких функций на всей оси $(-\infty < t < +\infty)$) удобно строить, представив исходный оператор в таком виде:

$$[I - Q_\varepsilon]u(t) = [I - P_0]u(t) + \int_0^\infty Q^0(ds)[u(t) - u(t - \varepsilon s)] + \varepsilon \int_0^\infty Q^1(ds)u(t - \varepsilon s) \quad (69)$$

Здесь использовано очевидное, с учетом (65), представление полумарковского ядра

$$Q^\varepsilon(ds) = Q^0(ds) - \varepsilon Q^1(ds), \quad Q^k(ds) = G(ds)P_k, \quad k=0,1.$$

Для нас сейчас важно лишь обратить внимание на то, что уравнение (69) задается возмущением приводимо обратимого оператора $Q_0 = I - P$ — производящей матрицы эргодической вложенной цепи Маркова. Так что, уравнения для регулярных членов асимптотики имеют следующий вид:

$$Q_0 u^0(t) = 0, \quad Q_0 u^k(t) = L_k(u^0(t), \dots, u^{k-1}(t)), \quad k \geq 1. \quad (70)$$

Правые части уравнений (70) при $k \geq 1$ представляют собой линейные операторы L_k , вид которых легко восстанавливается при помощи формулы Тейлора для функции $u(t - \varepsilon s)$ из исходного уравнения (69).

Перед тем, как приступить к построению погранслоев мы можем сразу ответить на вопрос: "А нужны ли погранслои?" Разумеется, и вот почему. Как и в случае поглощения марковского процесса, мы можем заключить, что $u^0(t) = C_0(t)I$, где $C_0(t)$ — неизвестная скалярная функция, а последующие регулярные члены асимптотики также представим в виде суммы

$$u^k(t) = u_0^k(t) + C_k(t)1, \quad k \geq 1, \quad (71)$$

в которой векторы $u_0^k(t)$ принадлежат R_{Q_0} подпространству значений оператора Q_0 и однозначно определяются предыдущими членами асимптотики. Таким образом, начальные граничные значения $u_0^k(0) = [I - P]u^k(0)$ — заданы, а $C_k(0) = Pu^k(0)$ — подлежат определению.

Вот как раз для компенсации невязки граничных значений в подпространстве R_{Q_0} и необходимы члены асимптотики типа погранслоя в асимптотическом анализе задачи (68)-(67).

Уравнение для погранслоя $V(t)$ получаем, применяя исходный оператор $I - Q^\varepsilon$ к функции $V(t/\varepsilon)$ с последующим очевидным переобозначением аргумента. В итоге имеем

$$[I - Q^\varepsilon]V(t) = [I - Q^0]V(t) - \varepsilon Q^1V(t). \quad (72)$$

Здесь

$$[I - Q^0]V(t) := V(t) - \int_0^\infty Q^0(ds)V(t-s), \quad (73)$$

$$Q^1V(t) := \int_0^\infty Q^1(ds)V(t-s). \quad (74)$$

Так что, рекуррентная система УМВ для погранслоев имеет следующий вид:

$$V^1(t) - \int_0^\infty Q^0(ds) V^1(t-s) = 0, \quad t \geq 0; \quad (75)$$

$$[I - Q^0] V^k(t) = Q^1 V^{k-1}(t), \quad t \geq 0, \quad k \geq 1. \quad (76)$$

К этим уравнениям необходимо еще задать значения погранслоев на отрицательной полуоси $t \leq 0$, которые легко следуют из асимптотического разложения ряда при $t \leq 0$

$$1 = u^\varepsilon(\varepsilon t) = u^0(\varepsilon t) + \varepsilon u^1(\varepsilon t) + \dots + V^1(t) + \dots \quad (77)$$

Например,

$$V^1(t) = V_0^1 + t u^0(0), \quad t \leq 0.$$

Здесь основная проблема состоит в построении решений уравнения (75) и (76), удовлетворяющих дополнительному условию

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V(t) = 0. \quad (78)$$

Прежде всего надо представить УМВ (75) в привычной форме /

$$V(t) - \int_0^t Q^0(ds) V(t-s) = W(t), \quad t \geq 0, \quad (79)$$

и воспользоваться узловой предельной теоремой марковского восстановления, которая в наиболее общих условиях доказана В.М.Шуренковым в работе "Эргодическая теория марковских процессов, 1989". Так что формально решение уравнения для погранслоя (16) представимо в виде

$$V(t) = [I - Q^0]^{-1} W(t) - \Pi \int_0^\infty W(s) ds / m, \quad (80)$$

где

$$m := \sum_{i \in E_0} \rho_i g_i, \quad g_i := \int_0^\infty G_i(s) ds. \quad (81)$$

Фактически же от такого погранслоя мало толку. Да, собственно говоря, он нам и не нужен. Достаточно только найти предельное значение погранслоя на бесконечности. Надежность стохастической системы определяется при достаточно больших значениях времени T , соизмеримых с параметром ε^{-1} , характеризующим "локальную" надежность системы. И значит, настоящий интерес представляют вероятности $P\{\tau_\varepsilon > T/\varepsilon\} = P\{\varepsilon \tau_\varepsilon > T\} = u^\varepsilon(T)$ которые достаточно хорошо аппроксимируются регулярными членами.

Завершающая проблема — *регулярность вырождения* задачи (68)—(67), т.е. возможность компенсировать невязки регулярных членов в подпространстве RQ_0 и одновременно задать начальные условия в подпространстве NQ_0 . Из представления (81) для погранслоя следует, что обе компоненты начального вектора $F(0)$ и в RQ_0 и в NQ_0

определяются видом граничных условий при $t \leq 0$ и правых частей уравнений (76). Совершенно неожиданно нам предоставилась возможность удачной стыковки.

Прежде всего, определим нулевой регулярный член $u^0(t) = C_0(t)1$ используя начальное условие $C_0(0) = 1$ и условие разрешимости уравнения (70) для следующего регулярного члена. В результате получим

$$u^0(t) = e^{-\Lambda t} 1, \quad (82)$$

$$\Lambda = \hat{g}/\hat{q}, \quad \hat{g} = \sum_{i \in E_0} \rho_i g_i, \quad \hat{q} = \sum_{i \in E_0} \rho_i q_{i0}. \quad (83)$$

Далее, из уравнения (75) для первого погранслоя с учетом граничного условия (78) вытекает соотношение

$$[I - P_0]V^1(0) = q - \Lambda g, \quad (84)$$

здесь: $q = (q_{i0}, i \in E_0), \quad g = (g_i, i \in E_0).$

Теперь из исходного уравнения (69) для нулевого регулярного члена $u^0(t)$ имеем

$$[I - Q^\varepsilon]u^0(t) = \varepsilon [-gP_0 u^{0'}(t) + P_1 u^0(t)] + o(\varepsilon) \quad (85)$$

Для следующего регулярного члена записываем уравнение (70)

$$[I - P_0]u^1(t) = -gP_0 u^{0'}(t) + P_1 u^0(t). \quad (86)$$

Полагая $t=0$, находим

$$[I - P_0]u^1(0) = \Lambda g - q. \quad (87)$$

Сравнивая (84) и (87), заключаем

$$[I - P_0](u^1(0) + V^1(0)) = 0. \quad (88)$$

А это значит, что компоненты начальных векторов регулярного и погранслоного членов в R_{Q_0} взаимно компенсируют друг друга.

Произошла удачная стыковка

$$u^1(0) = P^1(0) + [I - P]u^1(0)$$

Искомый совпадают

$$V^1(0) = PP^1(0) + [I - P]V^1(0)$$

Задан

Успешная стыковка начальных векторов регулярных и погранслоных членов может быть образно описана пасечником Рудым Паньком из повести Н.Гоголя "Заколдованное место". Для того, чтобы найти клад, дед Максим должен был очутиться в таком месте, из которого одновременно видны и гумно, и голубятня. Не так-то просто достаются сокровища!

В заключение замечу, что удачная стыковка первых двух членов асимптотики не решает всей проблемы. Необходимо удостовериться, что и последующие пары регулярных и погранслоных членов также обеспечивают регулярность вырождения.

Когда-то я исписал несколько страниц формул и убедился, что это так. Да опубликовать нет стимула. Кому это может понадобиться?

Когда долго живешь, не стоит удивляться, что старые пожелания сбываются. Так произошло с проблемой регулярности вырождения в асимптотическом анализе полумарковских случайных эволюций. По гранту DFG с университетом г. Бонн (Германия) в нашей группе стал принимать участие молодой кандидат Игорь Самойленко (ученик А.Турбина), который под моим руководством реализовал мою давнишнюю мечту и доказал регулярность вырождения в асимптотическом анализе полумарковских случайных эволюций, и заодно построил алгоритм вычисления любых членов асимптотики. Его результаты были с интересом обсуждены на семинаре руководителя гранта проф. С.Альбеверию. В итоге, по традиции отдела был подготовлен препринт "Asymptotic expansion of Semi-Markov random evolution", (III — 243, 2006).

Будем надеяться, что появится и статья в журнале.

Случайные блуждания. Граничные задачи

В конце 1960-х годов увлечение методом факторизации Фурье-Винера при решении граничных задач для случайных блужданий постепенно затихало в связи с тем, что получаемые формулы были весьма громоздкими и мало обозримыми. Кроме того, появилась конкретная задача, сформулированная физиологами (П.Г.Костюк, Б.Я.Пятигорский) о моделировании спонтанной активности нейронов. Естественным образом возникла модель случайного блуждания пуассоновского процесса с задерживающим экраном. Попытки решения дифференциально-разностного уравнения для преобразования Лапласа функции распределения времени достижения заданного уровня не привели к удовлетворительным для приложений результатам. Надо было искать более эффективный метод анализа. Прежде всего опыт использования уравнения для искомых распределений показывал, что различные функционалы от случайного блуждания задаются решениями одного и того же уравнения, но с различными правыми частями. Значит, должно быть "универсальное" решение типа функции Грина, при помощи которого можно определить решение заданного уравнения с различными правыми частями.

Поисками такого решения я занялся в начале 1970-х годов. Модель случайного блуждания, задаваемая посредством пуассоновского процесса со сносом и односторонних скачков была весьма перспективной благодаря простоте символа производящего оператора пуассоновского процесса. Решающую роль в построении "потенциала" сыграла лемма о факторизации символа

$$\psi(s) = \psi_0(s)g(s),$$

в которой множитель

$$\psi_0(s) = s(s - p),$$

соответствует дифференциальному оператору

$$\Psi_0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} + \rho I \right),$$

который, в свою очередь, определяет функцию

$$R(x) = C(1 - R \cdot \exp(-\rho x)),$$

удовлетворяющую уравнению

$$\Psi_0 R(x) = 0$$

с начальным условием $R(0) = C(1 - R)$. Константы C и R подлежат определению из дополнительных соображений. Факторизации символа производящего оператора L сложного пуассоновского процесса приводит к разложению

$$L = \Psi_0 G,$$

где G — интегральный оператор типа свертки:

$$G\phi(x) = \int_0^{\infty} \phi(x-y)G(y)dy.$$

Теперь осталось задать потенциал $R(x)$ при помощи решения уравнения $LR(x) = 0$ с граничными условиями $R(x) = 0, x < 0, R(+0) = 1$.

В качестве следствия получаем, что функция

$$u(x) = \int_0^x R(x-y)\phi(y)dy$$

удовлетворяет уравнению на полуоси $x \geq 0$:

$$(L) \quad Lu(x) = \phi(x), \quad u(x) = 0, \quad x < 0.$$

Решающее открытие состоит в том, что произвольное решение неоднородного уравнения (L) задается в виде

$$(U) \quad u(x) = CR(x) + \int_0^x R(x-y)\phi(y)dy$$

с произвольной константой C .

Кроме того, потенциал имеет представление:

$$(R) \quad R(x) = C(1 - R \cdot \exp(-\rho x) - V(x)),$$

в котором функция типа "погранслоя" $V(x)$ задается преобразованием Лапласа в явном виде, содержащем функцию $g(s)$ и ее значения в нулях символа $s_0=0, s_1=p$.

В представлении потенциала (R) существенно то, что ядро потенциала $R(x)$ неограниченно при $p < 0$. Кроме того, удивительно, что символ оператора R с ядром $R(x)$ имеет вид:

$$(r) \quad r(s) = 1/\psi(s).$$

Заметим, что функция $\psi(s)$ имеет нули $s_0=0, s_1=p$. Следовательно, для того, чтобы символу $r(s)$ соответствовал оператор типа свертки на положительной полуоси, необходимо, чтобы $r(s)$ была аналитической

функцией в правой полуплоскости. Именно возможность такого аналитического продолжения и обеспечивает существование потенциала как обратного оператора к производящему оператору L , т.е. на положительной полуоси имеет место равенство $R = L^{-1}$. Хотелось бы узнать комментарии специалистов по обращению дифференциально-разностных операторов. Было бы также интересно выяснить когда аналогичная идея возможна при более общих условиях. Замечательный математик В.М.Шуренков сразу проникся идеей построения потенциала и более общего объекта — резольвенты для процессов с независимыми приращениями со скачками одного знака, а мой ученик Н.С.Братийчук сумел обобщить теорию потенциала на произвольные процессы с независимыми приращениями, правда, за счет потери обзримости представления для ядра, хотя и с сохранением возможностей получения предельных соотношений.

В качестве следствия методом потенциала и резольвенты на полуоси были получены обзримые точные формулы для вероятностей разорения пуассоновского процесса со сносом, а также производящие функции момента разорения. Так что потенциал и резольвента получили вероятностную интерпретацию. Настойчивость и владение аналитическим аппаратом теории функций позволили Н.Братийчуку успешно преодолеть многочисленные аналитические трудности в построении достаточно общей теории граничных задач для марковских случайных блужданий, что завершилось защитой докторской диссертации в 1990 году. А в промежутке между кандидатской и докторской диссертациями Н.Братийчука, мы с ним подготовили четырех кандидатов наук для Туркмении.

Полумарковские процессы и их приложения

После защиты докторской диссертации в 1963 году, посвященной асимптотическому анализу в граничных задачах для случайных блужданий, возникла естественная проблема выбора направления дальнейших исследований. Разумеется, проблематика докторской диссертации оставалась актуальной. Однако, будучи руководителем отдела теории вероятностей и математической статистики после переезда Б.В.Гнеденко в Москву в 1960 году, мне необходимо было определяться с выбором научного направления для семинара отдела. Известно, что объединяющим фактором творческой деятельности научного отдела является совместная заинтересованность в тематике семинара по возможности всех сотрудников отдела. Обратив внимание на работы Р.Пайка (1961 год), посвященные процессам марковского восстановления (ПМВ), я на интуитивном уровне почувствовал, что модели ПМВ могут быть перспективными в приложениях к задачам теории надежности и системам обслуживания.

Обзорный доклад Т.П.Марьяновича по работам Р.Пайка на семинаре не прояснил ситуацию. Дело в том, что анализ чужих работ может быть двояким. Простейший результат, — констатировать факт получения результатов. Более глубокий анализ должен давать представление о существе дела: возможности метода исследования, перспективы интерпретации результатов, возникающие новые задачи. Перспектива вхождения в новую тематику существенно зависит от активности восприятия полученных ранее результатов. Важным фактором является настойчивость при проникновении в сущность анализируемой проблемы. Чтобы понять перспективность теории процессов марковского восстановления, не требовалось серьезных творческих усилий. Мне представлялось очевидным простота интерпретации ПМВ в прикладных задачах и прежде всего в надежности восстанавливаемых систем.

Работы нашего учителя Б.В.Гнеденко в 1964 году стимулировали интерес к новой тематике, к поиску новых методов асимптотического анализа надежности резервированных систем с использованием ПМВ.

В результате сформировалась естественная постановка задачи надежности сложных систем в виде задачи о времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний до поглощения (отказа системы). Решение сформулированной задачи о времени пребывания основано на исходных стохастических соотношениях. Переход к математическим ожиданиям или к производящим функциям приводит к системам линейных алгебраических уравнений, которые имеют очевидные решения при условии обратимости матрицы коэффициентов. Работа, опубликованная в Украинском математическом журнале (III — 44, 1965), не была завершающей. Далее следовало искать асимптотические результаты, вводя малый параметр серии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$). Так возникла задача о времени поглощения *полумарковского процесса* (ПМП) при условии, что вероятности поглощения стремятся к нулю вместе с $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом задача существенно усложнилась, так как детерминант матрицы коэффициентов соответствующей системы линейных алгебраических уравнений стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Правда, в этом случае свободный член системы также стремится к нулю. Возникла задача математического анализа, — раскрытие неопределенности. Для дублированной системы с восстановлением Б.В.Гнеденко в 1964 году получил предельное распределение времени безотказной работы, используя явные формулы для преобразования Лапласа искомой функции распределения.

Рассматривая задачу о поглощении, я использовал ПМП, а также исходную систему алгебраических уравнений для преобразований Лапласа функций распределения. Здесь возникает задача асимптотического анализа *матричной проблемы возмущения на спектре*.

Имея опыт использования проблемы сингулярного возмущения в асимптотическом анализе в граничных задачах для случайных блужданий

(тема докторской диссертации) с использованием усовершенствованного алгоритма последовательного исчерпывания невязок Вишика и Люстерника (1957 год), я естественно обнаружил аналогичный алгоритм для решения задач о возмущении матриц на спектре в работе М.Вишика и Л.Люстерника 1960 года, УМН, №3. В результате для производящих функций времени поглощения ПМП с конечным числом состояний в схеме серий был сформулирован алгоритм построения асимптотического разложения по степеням малого параметра $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) в статье, опубликованной в 1969 году (III — 64).

В этом же, 1969 году, ко мне в аспирантуру поступил А.Ф.Турбин с рефератом по системам обслуживания.

Так как на нашем семинаре ПМП использовались в качестве моделей систем обслуживания, то по моему заданию А.Ф.Турбин переделал реферат, продемонстрировав при этом творческий подход. В итоге А.Ф.Турбин предложил рассматривать проблему сингулярного возмущения матриц на спектре, как проблему обращения приводимо обратимого оператора в банаховом пространстве. Так появилась наша совместная работа, в 1970 году, опубликованная в журнале "Теория вероятностей и математическая статистика" (III — 66, 1970).

А.Ф.Турбин защитил кандидатскую диссертацию в 1971 году и стал активно развивать метод теории сингулярного возмущения операторов с приложениями в асимптотическом фазовом укрупнении полумарковских процессов. В результате появились монографии "Полумарковские процессы и их приложения", Киев, "Наукова думка" (I — 2, 1976), и "Математические основы фазового укрупнения сложных систем", Киев, "Наукова думка" (I — 3, 1978). Последняя монография была, по существу, изложением докторской диссертации А.Ф.Турбина, защищенной в 1980 году. Вместе с тем, перспективы применения алгоритмов фазового укрупнения полумарковских систем были нами реализованы в виде монографии "Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем", Киев, "Наукова думка" (I — 5, 1982).

Применение *алгоритмов фазового укрупнения* (АФУ) в анализе стохастических систем осуществлялось по следующей схеме: сначала строились интегральные *уравнения марковского восстановления* (УМВ) для искомых функций распределения, а затем из преобразований Лапласа получалась задача сингулярного возмущения на спектре.

Меня не покидала надежда исключить этап преобразования Лапласа в асимптотическом анализе УМВ в схеме серий. Для реализации прямого исследования УМВ необходимо было найти способ построения погранслоев для УМВ. Убежденный в бесперспективности этой задачи, я предложил рассматривать АФУ для марковских процессов. Тогда УМВ сводится к эволюционному уравнению с сингулярно возмущенным выражением скорости вида:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = [\varepsilon^{-1}Q + Q_1]u^\varepsilon(t).$$

Здесь Q - генератор эргодического марковского процесса, а Q_1 — оператор возмущения. Построение погранслоя в этом случае осуществляется довольно просто. Перепишывая уравнение для функции типа погранслоя, т.е. $v^\varepsilon(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$:

$$dv^\varepsilon(\tau)/d\tau = [Q + \varepsilon Q_1]v^\varepsilon(\tau),$$

мы получаем регулярное возмущение для погранслоев. Осталось установить, как используется "граничное" условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) = 0$$

при построении решений типа погранслоев. Эта проблема описана в разделе "Погранслои".

Приложения полумарковских процессов. С самого начала развития теории полумарковских процессов основным объектом приложений были модели резервированных систем в теории надежности.

Простым объектом приложений теории ПМП были модели систем обслуживания $G|M|$ или $M|G|1$, т.е. системы обслуживания с произвольным распределением (G) времени поступления требований или времени обслуживания. Описание и анализ моделей резервированных систем с восстановлением, а также указанных моделей систем обслуживания было нами изложено в специальной монографии "Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем". - Киев: Наукова думка, 1982 (В.С.Корольук, А.Ф.Турбин). Как и в предыдущих монографиях, алгоритмы фазового укрупнения использовались в асимптотическом анализе преобразований Лапласа искомых функций распределения. Для дублированных систем (с двумя функционирующими приборами) при вычислении надежностных характеристик не возникало существенных трудностей благодаря простоте выражения для стационарного распределения опорной вложенной цепи Маркова (ВЦМ). Однако проблема существенно усложнялась при рассмотрении многокомпонентных систем. Здесь помогла интуиция. Поскольку стационарное распределение ВЦМ задавалось функциями распределения *предельных величин перескока* (ПВП), то естественно было предположить, что и для многокомпонентных систем можно сохранить дискретность фазового пространства состояний, используя ПВП в качестве времен пребывания в данном состоянии. Так возникла идея стационарного фазового укрупнения ПМП, а также эвристические принципы фазового укрупнения. Изложение алгоритмов фазового укрупнения на эвристическом уровне (без использования предельных теорем в схеме серий), а также эвристических принципов фазового укрупнения и их применение в анализе надежности многоканальных

систем было систематизировано в монографии "Стохастические модели систем", Киев: Наукова думка (I — 9 1989).

Впоследствии содержание монографии дополнялось в новых изданиях: "Стохастичні моделі систем", Київ, Либідь (I — 13, 1993), а также "Stochastic Models of Systems", Dordrecht: Kluwer (I — 20, 1999). Особенность этих трех монографий в том, что ни одна из них не является переводом другой. Разумеется, содержание всех трех книг существенно пересекается.

Случайные эволюции

В самом начале 1980-х годов асимптотическая теория фазового укрупнения полумарковских процессов была в основном, завершена. Внимание уделялось расширению области приложения алгоритмов фазового укрупнения (АФУ), особенно в анализе надежности многокомпонентных восстанавливаемых систем, а также в анализе систем обслуживания с полумарковскими потоками.

Однажды А.Ф.Турбин обратил мое внимание на работы Грегора и Херша, в которых было изложено описание случайных эволюций в полумарковской случайной среде. Я немедленно ухватился за идею расширить область применения АФУ в асимптотическом анализе случайных эволюций в полумарковской случайной среде. Существенной особенностью полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ) была возможность задания среднего значения эволюции *уравнением марковского восстановления* (УМВ), содержащем в ядре полугруппу операторов, задающих эволюцию между скачками ПМП, а также операторов, определяющих скачки эволюции в моменты скачков ПМП.

При этом в марковской среде УМВ преобразуется в эволюционное дифференциальное уравнение, содержащее в правой части генератор марковского процесса и производящий оператор полугруппы, задающей эволюции. В схеме усреднения с быстрыми переключениями порядка ε^{-1} справа имеем сингулярно возмущенный генератор эргодического марковского процесса

$$d\Phi^\varepsilon(t)/dt = [\varepsilon^{-1}Q + C(x)]\Phi^\varepsilon(t),$$

где $C(x)$ — производящий оператор полугруппы $C_1(x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, задающей эволюцию

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t); x), \quad x \in E.$$

Так что

$$\Phi^\varepsilon(t) := \varphi(u^\varepsilon(t)), \quad u^\varepsilon(0) = u,$$

для заданной тест-функции

$$\varphi(u), \quad u \in R^d$$

в банаховом пространстве $B(R^d)$.

Аналогично задается распределение времени поглощения марковского процесса в схеме серий исследованного в наших с А.Турбиным и И.Пеневым (аспирантом из Болгарии) работах (III — 113). Так что мы были вполне готовы распространить АФУ на случайные эволюции в схеме усреднения в эргодической или с расцепляемым пространством состоянии переключающего ПМП.

В 1982 году, в августе месяце, состоялся IV-й советско-японский симпозиум по теории вероятностей и математической статистике в г. Тбилиси. Мы подготовили доклад "Предельные теоремы для марковских случайных эволюций" (III — 121) совместно с А.Турбиным и включили в него нового аспиранта нашего отдела А.Свищука.

Уверенный в перспективности новой тематики, я поручил А.Турбину курировать исследования А.Свищука по теории случайных эволюций. Спустя полгода, а может и более, я обнаружил в беседе с А.Свищуком, что он топчется на месте, занимаясь "ультра-абстрактной" проблемой, которую ему сформулировал А.Турбин. Надо было построить "абстрактную" случайную эволюцию, аргументом которой была бы операторно-значная случайная эволюция. Или что-то в этом роде. Мне пришлось спустить А.Свищука с небес абстракции на землю и сформулировать ему проблему построения диффузионной аппроксимации случайной эволюции в "условиях баланса":

$$du^\varepsilon(t)/dt = C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); \kappa(t, \varepsilon^2)), C^\varepsilon(u; x) = \varepsilon^{-1}C(u; x) + C_0(u; x),$$

с условием баланса

$$\int_E \pi(dx) C(u; x) \equiv 0.$$

Чтобы понять сложность проблемы для аспиранта достаточно сравнить изложение АФУ в монографии В.С.Корольюк, А.Ф.Турбин "Математические основы фазового укрупнения сложных систем" (I — 3, 1978), глава 3, с АФУ в монографии В.С.Корольюк, А.В.Свищук "Полумарковские случайные эволюции" (I — 11, 1992), глава 2 (Теорема 2.2). Последовала серия совместных с А.Свищуком работ, и его самостоятельных работ, ставших основой сначала кандидатской (в 1985 году), а затем и докторской (в 1992 году) диссертаций (111 — 131, 111 — 134, III — 140, III — 145, III — 152).

Теория случайных эволюций в асимптотической схеме усреднения и диффузионной аппроксимации в эргодической и в расщепляемой полумарковской случайной среде была развита на основе решения проблем сингулярного возмущения для приводимо обратимых операторов. При этом объектом асимптотического анализа служили линейные уравнения для преобразований Лапласа искомых функциональных характеристик случайных эволюций.

В начале 1980-х годов А.Н.Ширяев вместе со своими учениками занимались развитием теории семимартингалов, и в частности, проблемами сходимости семимартингалов. Узнав о написании монографии, я попросил у Альберта Ширяева рукопись (в то время мы еще дружили), которую мы использовали для изучения на нашем семинаре. Так что вопросы сходимости случайных процессов в схеме серий были для участников семинара хорошо известны.

Схема асимптотического анализа состояла из двух частей: построение алгоритмов усреднения и диффузионной аппроксимации, и обоснования слабой сходимости рассматриваемых случайных процессов. Вторая часть опиралась на хорошо развитую теорию сходимости случайных процессов, основанную на мартингальной характеристике марковских процессов.

Как всегда, неожиданно, но по законам Провидения, я познакомился с небольшой заметкой М.Свириденко (ученицы А.Д.Вентцеля) в журнале "Теория вероятностей и ее приложения" (1986 г.), в которой предельные теоремы для полумарковских процессов доказаны с использованием так называемого полукompенсирующего оператора, позволяющего построить мартингальную характеристику *процесса марковского восстановления* (ПМВ). Интуиция мне подсказала, что это и есть "адекватный подход" в асимптотическом анализе полумарковских случайных эволюций. Разумеется, для реализации такого подхода необходимо было ввести компенсирующий (приставку "полу" решил удалить для простоты) оператор *расширенного* ПМВ по аналогии с тем, как строились уравнения марковского восстановления для ПМСЭ. Эту программу мы реализовали вместе с профессором Технологического университета в г. Компьень (Франция) Николаосом Лимниосом, который пригласил меня в качестве визитер-профессора на 7 месяцев (декабрь 1999 г - июнь 2000 г.). Легко вычислить, что наступление третьего тысячелетия мы с женой встретили в Компьене, с французским шампанским и с печенкой канадской утки в качестве закуски, наблюдая по телевизору за фейерверком в Париже у Эйфелевой башни. Реализация программы затянулась на 6 лет. В 2005 году, юбилейном для меня, я подарил себе на свое 80-летие монографию "Stochastic Systems in Merging Phase Space" (I — 22, 2005, World Scientific Publishing), авторы Vladimir S. Koroliuk, Nikolaos Limnios. Существенное различие в изложении теории случайных эволюций в схеме серий с усреднением и диффузионной аппроксимации в монографиях А.Свищуком и Н.Лимниосом заметно, как говорится, невооруженным глазом.

Монография 2005 года построена по следующей схеме. Первые две главы — вводные. В них излагаются все необходимые предварительные сведения о ПМП, о случайных эволюциях, о компенсирующем операторе ПМВ и т.д. В двух последующих, 3-й и 4-й главах изложены предельные

результаты в схеме серий в эргодическом и в расщепляемом фазовом пространстве переключающего ПМП. Далее, глава 5, содержит решения проблем сингулярного возмущения в трех существенных ситуациях: когда возмущение допускает нетривиальное усреднение, в условиях баланса, т.е. усредненное возмущение тривиально, и наконец, возмущение обладает приводимо обратимым свойством. Далее, можно комбинировать эти три ситуации. В главе 5 приведены две дополнительные ситуации с сингулярным возмущением третьего и четвертого порядка, т.е. с главным членом, содержащем множитель ε^{-3} и ε^{-4} . Замечательным фактом является возможность реализации таких сингулярных возмущений в реальных стохастических системах. Глава 5 содержит также алгоритмы усреднения и диффузионной аппроксимации стохастических систем, для которых результаты приведены в главе 3 и 4. Следует отметить, что конечные результаты вычисляются по формулам, задающим решения проблем сингулярного возмущения, а не угадываются с привлечением интуиции. Обоснование сходимости случайных эволюций в схеме серий осуществляется в следующей главе 6, с использованием мартингальной характеристики вложенных процессов марковского восстановления, а также предельных теорем для случайных процессов.

Читателю предлагается на выбор: использовать готовые результаты глав 3 и 4, или овладеть алгоритмами фазового усреднения главы 5. При наличии достаточного любопытства, можно познакомиться со схемой обоснования предельных результатов в главе 6.

Монография содержит также результаты пуассоновской аппроксимации случайных эволюций. Об этом написано в разделе "Случайные блуждания". Однако, в принципе, пуассоновскую аппроксимацию импульсных процессов естественно рассматривать в разделе "Случайные эволюции". Сущность пуассоновской аппроксимации состоит в том, что малый параметр серии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) входит в интенсивности случайных скачков эволюции, так что большие скачки происходят с малой вероятностью, стремящейся к нулю вместе с $\varepsilon \rightarrow 0$, а малые скачки осуществляются с вероятностями, стремящимися к единице. Такое введение малого параметра серии приводит к тому, что предельная эволюция сохраняет стохастичность.

Следует обратить внимание на такой существенный факт. В схеме усреднения главное условие — усреднение скачков. В схеме диффузионной аппроксимации — дополнительно усредняются вторые моменты скачков. В схеме пуассоновской аппроксимации необходимо дополнительно усреднять интенсивности скачков. В общем виде такое усреднение осуществляется в предельных теоремах для семимартингалов (см. монографию Ж.Жакод, А.Н.Ширяев *Предельные теоремы для случайных процессов*, Москва, 1994, русский вариант в 1987). Нам оставалось только приспособить эти условия в схеме серий для

стохастических систем в случайной среде. Полученные нами результаты неизбежно приводят к убеждению, что "большие" (редкие, "катастрофические") выбросы стохастической системы происходят с интервалами, имеющими показательное распределение. Значит, такие события непредсказуемы. Можно только дать достоверную статистическую оценку интенсивности редких событий, т.е. число наступлений за единицу времени. Разумеется, такой прогноз имеет место в тех стохастических процессах в эргодической случайной среде, для которых применимы алгоритмы пуассоновской аппроксимации.

Схема диффузионной аппроксимации процессов с локально независимыми приращениями

1. Введение

Исходным объектом в схеме диффузионной аппроксимации (СДА) служит производящий оператор ПЛНП³

$$L\varphi(u) = \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] Q(u, dv), \quad (1)$$

описывающий только скачкообразную часть процесса. Очевидно, что такие процессы содержат, как частный случай, процессы типа рождения и гибели, в которых возможны только целочисленные скачки, например, ± 1 . Для процесса с генератором (1) это означает, что интенсивность задается следующими функциями:

$$Q(u, +1) = \lambda(u), \quad Q(u, -1) = \mu(u).$$

Так что генератор такого процесса имеет вид:

$$L\varphi(u) = \varphi(u+1)\lambda(u) + \varphi(u-1)\mu(u) - \varphi(u)[\lambda(u) + \mu(u)].$$

Прежде всего, выделим средний снос процесса, добавив и вычтя под знаком интеграла $v\varphi'(u)$:

$$L\varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)] Q(u, dv). \quad (2)$$

Функция скорости $C(u)$ определяет среднюю величину скачка процесса за единицу времени:

$$C(u) = \int_{R^d} v Q(u, dv). \quad (3)$$

³ В отличие от общей схемы задания производящего оператора марковского процесса с дискретным временем переходными вероятностями за один шаг вида

$$P(x, dy) := P\{\kappa_{n+1} \in dy | \kappa_n = x\},$$

для ПЛНП в евклидовом фазовом пространстве состояний R^d , $d \geq 1$, ядро интенсивностей $Q(u, dv)$ задает интенсивность и величину скачка v , что позволяет в выражении для генератора записывать функцию v - виде $\varphi(u+v)$. Такая возможность обеспечивается наличием операции сдвига (сложения-вычитания) точек в R^d . Представление генератора (1) со сдвигом аргумента в тест-функции существенно при построении СДА.

Заметим, что первое слагаемое в (2) задает детерминированный процесс $p(t)$, $t \geq 0$, определяемый эволюционным уравнением

$$d\rho(t)/dt = C(\rho(t)). \quad (4)$$

Известно, что генератор эволюции (4) задается выражением*

$$C\varphi(u) = C(u)\varphi'(u)^*. \quad (5)$$

Теперь нетрудно догадаться, как должны вести себя траектории процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, с генератором (1), или, что то же самое, с (2), на бесконечности, с учетом того, что выделенная "мартингальная" скачкообразная часть в (2) "в среднем" дает нулевые приращения.

При подходящей нормировке траектории должны сближаться с детерминированной эволюцией $p(t)$, $t \geq 0$, которая определяется уравнением (4). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим процессы в схеме серий с малым параметром $\varepsilon \rightarrow 0$, ($\varepsilon > 0$):

$$\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon \xi(t/\varepsilon), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Генератор процесса $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, будет иметь следующий вид (мы стартуем с (1)):

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \mathcal{Q}(u, dv). \quad (7)$$

Параметр ε^{-1} соответствует нормировке времени в (6), а εv фиксирует нормировку процесса в (6). Теперь снова преобразуем (7) к "мартингальному" виду (2):

$$L^\varepsilon \varphi(u) = C(u)\varphi'(u) + \varepsilon^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v \varphi'(u)] \mathcal{Q}(u, dv). \quad (8)$$

Детерминированная составляющая (ср. с (2)) осталась неизменной. А "мартингальная" скачкообразная составляющая на достаточно гладких функциях, например $\varphi(u) \in C_0^2(R^d)$, с компактным носителем стремится к нулю вместе с параметром серии ε :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(u) &:= \varepsilon^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v \varphi'(u)] \mathcal{Q}(u, dv) = \\ &= \varepsilon \int_{R^d} \varphi''(u + \theta^\varepsilon v) \mathcal{Q}(u, dv) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Следовательно, для нормированного процесса (6) имеет место сходимость:

$$L^\varepsilon \varphi(u) \rightarrow C\varphi(u), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in C_0^2(R^d). \quad (9)$$

Это условие является базовым при доказательстве сходимости процессов:

$$\xi_\varepsilon(t) \Rightarrow \rho(t), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

* В R^d , $d \geq 1$, произведение в (5) понимается как скалярное произведение векторов

$$C(u)\varphi'(u) := \sum_{k=1}^d C_k(u) \partial \varphi(u) \cdot \partial u_k$$

в смысле сходимости конечномерных распределений или в смысле слабой сходимости. Это зависит от того, какой именно вид предельных теорем для случайных процессов будет задействован.

Флуктуации процесса. Следующий шаг в построении СДА состоит в рассмотрении флуктуаций процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, относительно детерминированной эволюции $p(t)$, $t \geq 0$ (которую естественно назвать "эквилибриум"). Возникает ключевая проблема нормировки. При условии сходимости (10), очевидно, разность надо делить на параметр серии ε (в какой-то степени (?)). Решающий шаг состоит в том, что для того, чтобы выделить "конечные" отклонения флуктуаций надо еще раз перенормировать время. Необходимо удлинить интервал наблюдений. Таким образом, надо рассматривать исходный процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, с нормировкой времени ε^2 : $\xi(t/\varepsilon^2)$. Для сохранения сходимости (10) умножаем на ε^2 : $\varepsilon^2 \xi(t/\varepsilon^2)$. Далее вычитаем детерминированную составляющую $p(t)$ и делим на ε :

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \xi(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} p(t), \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Это и есть исходный процесс в СДА. Теперь надо построить производящий оператор процесса (11). Однако он уже не обладает марковским свойством, так как приращение нормированного процесса (11) зависит от приращения эквилибриума. Поэтому следует добавить еще и компоненту $p(t)$, $t \geq 0$. Двухкомпонентный процесс $\xi_\Delta(t)$, $p(t)$, $t \geq 0$, уже марковский. Вычислим его производящий оператор. Для этого рассмотрим условное математическое ожидание приращений:

$$E^\Delta \phi(u, v) = E[\phi(u + \Delta \zeta^\varepsilon(t), v + \Delta p(t)) | \zeta^\varepsilon(t) = u, p(t) = v].$$

Согласно (11)

$$\Delta \zeta^\varepsilon(t) := \zeta^\varepsilon(t + \Delta) - \zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \Delta \xi^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \Delta p(t).$$

Далее воспользуемся формулой Тейлора по обеим переменным, чтобы избавиться от приращений эквилибриума в тест-функции

$$\begin{aligned} E^\Delta \phi(u, v) &= \\ &= E_{u,v}[\phi(u + \Delta \xi^\varepsilon(t/\varepsilon^2), v) - \varepsilon^{-1} \Delta p(t) \phi'_u + \Delta p(t) \phi'_v] + o(\Delta). \end{aligned}$$

Согласно эволюции (4) с начальным условием $p(t) = v$, имеем по формуле средних для интеграла

$$\Delta p(t) := p(t + \Delta) - p(t) = \Delta C(v) + o(\Delta).$$

Остается вычислить условное математическое ожидание приращения нормированного процесса $\xi^\varepsilon(t)$ при начальных условиях: $\xi^\varepsilon(t) = u$, $p(t) = v$.

Чтобы завершить вычисления вернемся к нормировке (11), из которого следует равенство

$$v + \varepsilon u = \varepsilon^2 \xi(t/\varepsilon^2). \quad (12)$$

Вот это значение мы и примем за начальное значение процесса $\xi^\varepsilon(t)$.

Так что

$$\begin{aligned} E_{u,v} \phi(u + \varepsilon \Delta \zeta^\varepsilon(t/\varepsilon^2), v) - \phi(u, v) &= \\ &= E_{v+\varepsilon u, v} \phi(u + \varepsilon \Delta \zeta^\varepsilon(t/\varepsilon^2), v) - \phi(u, v) = \\ &= \varepsilon^{-2} \Delta Q^\varepsilon(v) \phi(u, v) + o(\Delta), \end{aligned}$$

где генератор

$$Q^\varepsilon(v) \phi(u) := \int [\phi(u + \varepsilon z) - \phi(u)] Q(v + \varepsilon u, dz).$$

Нормировка исходного процесса (11) приводит к следующему виду генератора пары $\xi^\varepsilon(t), p(t), t \geq 0$ -

$$L^\varepsilon \phi(u, v) = \varepsilon^{-2} Q^\varepsilon(v) \phi(u, v) - \varepsilon^{-1} C(v) \phi'_u(u, v) + C(v) \phi'_v(u, v). \quad (13)$$

Заметим, что компонента

$$C(v) \phi'_v(u, v)$$

задает генератор (ср. (5)) второй компоненты процесса $p(t), t \geq 0$.

На завершающем этапе СДА остается построить асимптотическое разложение генератора L^ε на достаточно гладких тест-функциях при дополнительных, конечно, условиях на гладкость интенсивности $Q(u, dv)$ исходного процесса.

Сначала совершим такое же преобразование, как и в схеме усреднения, но продолжим его до второго члена формулы Тейлора для тест-функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} Q^\varepsilon(v) \phi(u) &= \varepsilon^{-2} \int_{R^d} [\phi(u + \varepsilon z) - \phi(u)] Q(v + \varepsilon u, dz) = \\ &= \varepsilon^{-1} \int_{R^d} z Q(v + \varepsilon u, dz) \phi'_u(u) + \frac{1}{2} \int_{R^d} z z^* Q(v + \varepsilon u, dz) \phi''(u) + \theta^\varepsilon(v) \phi(u). \quad (14) \end{aligned}$$

Согласно (3) первое слагаемое имеет вид:

$$\varepsilon^{-1} C(v + \varepsilon u) \phi'_u(u) = \varepsilon^{-1} C(v) \phi'_u(u) + u C'(v) \phi'_u(u) + \theta^\varepsilon_C(v) \phi'_u(u), \quad (15)$$

а для второго слагаемого понадобится дополнительное условие аппроксимации:

$$\int_{R^d} z z^* Q(v + \varepsilon u, dz) = B(v) + \theta^\varepsilon_b(v, u). \quad (16)$$

В двух формулах предполагается, что остаточные члены стремятся к нулю вместе с малым параметром серии $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$|\theta^\varepsilon| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Соотношения (14)–(16) вместе с (13) приводят к асимптотическому представлению генератора нормированного процесса (11) вместе с эквилибриумом $p(t), t \geq 0$:

$$L^\varepsilon \phi(u, v) = L_0 \phi(u, v) + C(v) \phi'_v(u, v) + \theta^\varepsilon_b \phi(u, v). \quad (17)$$

Здесь

$$L_0 \phi(u, v) = u C'(v) \phi'_u(u) + \frac{1}{2} B(v) \phi''(u) \quad (18)$$

есть генератор диффузии вдоль эквилибриума.

Упражнение. Двухкомпонентный марковский процесс $\zeta(t), p(t), t \geq 0$, у которого первая компонента удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\zeta(t) = C'(\rho(t))\zeta(t)dt + B(\rho(t))dW_t, \quad (19)$$

а вторая, $p(t), t \geq 0$, задает эволюцию (3), имеет производящий оператор

$$L\phi(u, v) = L_0\phi(u, v) + C(v)\phi'(u, v), \quad (20)$$

что является главной частью асимптотического представления генератора L^ε , нормированного (и центрированного) процесса $\zeta^\varepsilon(t), p(t), t \geq 0$

Сходимость генераторов

$$L^\varepsilon\phi(u, v) \Rightarrow L\phi(u, v), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (21)$$

на достаточно богатом классе тест-функций обеспечивает сходимость процессов

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (22)$$

в том или ином смысле, в зависимости, как уже говорилось, от использованного аппарата теории предельных теорем для случайных процессов.

Следует заметить, что при асимптотическом анализе генератора в (13) удалось избавиться от сингулярного члена с множителем ε^1 у производной $\phi^1(u, v)$. Это объясняется тем, что в качестве центрирующей функции мы выбрали эквilibrium - процесс $p(t)$, определяемый эволюцией (4), скорость которой $C(v)$ задается усредненным сдвигом за единицу времени (3).

И значит, для определения центрирующей функции $p(t), t \geq 0$, не требуется совершать предельный переход в (10), а затем определять эквilibrium — процесс из эволюционного уравнения (4).

В нашей книге [I - 22] рассмотрена СДА в более общих условиях, когда исходный процесс также зависит от параметра серии ε , т.е. функция интенсивностей $Q^\varepsilon(u, dz)$ достаточно гладким образом зависит от ε , — так чтобы первые два момента допускали асимптотические аппроксимации.

Остается рассмотреть поведение начальных условий. Сходимость генераторов (21) не обеспечивает сходимость процессов (22). Надо, по крайней мере, иметь сближающиеся начальные условия:

$$\varepsilon^2 \xi(0) = \rho(0) + \varepsilon \zeta^\varepsilon(0).$$

Так что, если $\zeta^\varepsilon \Rightarrow \zeta^0 = \zeta(0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то это означает, что начальные значения исходного процесса $\zeta(t)$ нормированные ε^2 должны находиться в ε -окрестности начального значения $\rho(0)$ эквilibrium-процесса.

Замечание. Если эквilibrium-процесс $p(t), t \geq 0$, имеет точку равновесия, т.е. существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho.$$

то исходный процесс $\zeta(t)$ должен сближаться с точкой равновесия p . Но тогда можно рассматривать нормированный процесс $\zeta^\varepsilon(t)$, центрируя не функцией $p(t)$, $t \geq 0$, а положением равновесия

$$\rho: \zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon \zeta(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} p, \quad t \geq 0.$$

При такой нормировке процесс $\zeta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, остается марковским, однородным по времени и для него предельный диффузионный процесс $\zeta(t)$, $t \geq 0$, будет процессом Орнштейна-Уленбека:

$$d\zeta(t) = a\zeta(t)dt + \sigma(\rho)dW_t,$$

с генератором

$$L\varphi(u) = a u \varphi'(u) + \frac{1}{2} B \varphi''(u).$$

Коэффициенты сноса a и диффузии B , определяются соотношениями:

$$a = C'(\rho), \quad B = B(\rho) = \sigma(\rho)\sigma^*(\rho).$$

При этом начальные условия для нормированного процесса выбираются в окрестности положения равновесия p . Разумеется, и в общем случае флуктуации оказываются в окрестности эквilibриума p . Возникает интересная и важная для приложений *проблема вхождения в стационарный режим*: начиная с какого момента времени T , можно считать, что исходная траектория процесса $\zeta(t)$ находится в достаточно малой окрестности эквilibриума p ?

Диффузионная аппроксимация процессов обслуживания. Схема диффузионной аппроксимации является одним из эффективных методов построения упрощающих моделей сложных стохастических систем. Выбор класса процессов с локально независимыми приращениями обусловлен прежде всего тем, что класс процессов содержит в себе "марковские процессы обслуживания" (МПО), описывающие состояние систем обслуживания, резервированных восстанавливаемых систем и т.п. (см. [1 - 22, Гл.5]).

Естественно обсудить вопрос, как схема диффузионной аппроксимации для ПЛНП применяется в анализе марковских процессов обслуживания? Возникает две возможности: либо применять общую схему в анализе конкретной МПО, либо построить *алгоритм диффузионной аппроксимации* (АДА) для конкретного класса марковского процесса обслуживания. Второй путь представляется более подходящим, поскольку единый алгоритм диффузионной аппроксимации для данного класса МПО более удобен и нагляден, чем общая схема.

В нашей книге [1 - 22] единый алгоритм диффузионной аппроксимации сформулирован для достаточно широкого класса МПО, типа процессов рождения и гибели, в виде "коллективной предельной теоремы" 5.4 (с. 158). Слово "коллективная" как раз и означает, что алгоритм применим для целого класса МПО, задаваемых достаточно

обозримыми характеристиками, а именно, функциями интенсивностей положительных и отрицательных скачков. В терминах ПЛНП это означает, что ядро интенсивностей $Q(u, dz)$ имеет следующее представление:

$$Q(u, +1) = \lambda(u), \quad Q(u, -1) = \mu(u). \quad (1)$$

Так что исходный МПО $v(t)$, $t \geq 0$, описывает число действующих приборов в системе обслуживания, резервирования с восстановлением и т.п.

Для начала рассмотрим схему усреднения, т.е. рассмотрим нормированный процесс

$$v_\varepsilon(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (2)$$

для которого интенсивности скачков имеют вид:

$$Q_\varepsilon(u + \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \lambda(u), \quad Q_\varepsilon(u, -\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \mu(u). \quad (3)$$

Это означает, что исходные интенсивности также нормированы:

$$\lambda_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-1} \lambda(\varepsilon k), \quad \mu_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-1} \mu(\varepsilon k).$$

С учетом представлений (2) и (3) для генератора МПО $v_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, находим функцию скорости детерминированного сдвига

$$C(u) = \lambda(u) - \mu(u). \quad (4)$$

Схема усреднения для нормированного МПО (2) дает сходимость

$$v_\varepsilon(t) \Rightarrow \rho(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

где эквилибриум-траектория $\rho(t)$, $t \geq 0$, определяется решением эволюционного уравнения

$$d\rho(t)/dt = \lambda(\rho(t)) - \mu(\rho(t)), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

При условии устойчивости решений уравнения (6), т.е. когда существует точка равновесия

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t), \quad C(\rho) = 0, \quad (7)$$

алгоритм диффузионной аппроксимации строится для нормированного процесса

$$\zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon v_\varepsilon(t/\varepsilon) - \varepsilon^{-1} \rho, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Построим генератор процесса (8). Соотношения (2) и (8) дают

$$\rho + \varepsilon \zeta_\varepsilon(t) = \varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2). \quad (9)$$

Следовательно, генератор процесса (8) представим в виде (см. также (3))

$$\begin{aligned} L^\varepsilon \varphi(u) &= \\ &= \varepsilon^{-2} [\lambda(\rho + \varepsilon u) \varphi(u + \varepsilon) + \mu(\rho + \varepsilon u) \varphi(u - \varepsilon) - B(\rho + \varepsilon u) \varphi(u)], \end{aligned} \quad (10)$$

здесь

$$B(u) := \lambda(u) + \mu(u). \quad (11)$$

Применяя к тест-функции формулу Тейлора до второго члена и к функциям интенсивности до первого члена, получаем следующее асимптотическое представление генератора (10)

$$L^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} C(\rho) \varphi'(u) + u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} B(\rho) \varphi''(u) + o_\varepsilon(1). \quad (12)$$

С учетом условия эквилибрия (7), предельный генератор

$$L\varphi(u) = u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} B(\rho) \varphi''(u) \quad (13)$$

задает марковский диффузионный процесс типа Орнштейна-Уленбека. Алгоритм диффузионной аппроксимации для марковских процессов обслуживания состоит в том, что по данным функциям интенсивностей $\lambda(u)$, $\mu(u)$ вычисляется точка равновесия ρ из уравнения

$$\lambda(\rho) - \mu(\rho) = 0. \quad (14)$$

Затем определяются параметры сноса

$$C'(\rho) = \lambda'(\rho) - \mu'(\rho), \quad (15)$$

и дисперсии

$$B(\rho) = \lambda(\rho) + \mu(\rho) \quad (16)$$

для аппроксимирующего процесса $\zeta_0(t)$, который задается генератором (13). Диффузионная аппроксимация выглядит так:

$$\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2) \cong \rho + \varepsilon \zeta_0(t), \quad t \geq 0. \quad (17)$$

В нашей книге [I - 22] рассмотрен и более общий алгоритм диффузионной аппроксимации для МПО в предположении, что функции интенсивностей зависят от параметра серии ε , что вполне может иметь место в приложениях.

Теперь мы рассмотрим применение АДА к конкретной стохастической системе, которую В.Феллер назвал "система потребления энергии". В нашей книге [I - 22, § 5.5.3] эта система называется "*система с ограниченным входом*". Имеется N одинаковых приборов. Каждый прибор может находиться в двух различных состояниях: рабочем состоянии – код 1, и в восстанавливаемом состоянии – код 0.

Переходы из одного состояния в другое описываются альтернирующим процессом восстановления (см. [I - 22, § 1.2.5]) с показательным временем пребывания в рабочем и восстанавливаемом состояниях с интенсивностями λ и μ соответственно. Марковский процесс обслуживания $v(t)$, $t \geq 0$, описывает количество рабочих (или восстанавливаемых) приборов. Будем считать, что $v(t)$ — это число восстанавливаемых приборов (также рассматривается в книге [I - 5]). Очевидно, что фазовое пространство состояний $E = \{0, 1, \dots, N\}$ состоит из конечного числа, $N + 1$, состояний.

Напомним уникальное свойство показательного распределения: минимум независимых показательно распределенных величин имеет показательное распределение с интенсивностью, равной сумме интенсивностей:

$$P\left(\bigwedge_{k=1}^N \theta_k > t\right) = \prod_{k=1}^N P(\theta_k > t) = \prod_{k=1}^N e^{-\lambda_k t} = e^{-\sum_{k=1}^N \lambda_k t}.$$

Теперь интенсивности переходов процесса $y(0, t) > 0$, легко определяются:

$$\begin{aligned} Q(n+1) &= (N-n)\lambda, & 0 \leq n \leq N, \\ Q(n-1) &= n\mu, & 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (18)$$

Если число восстанавливаемых приборов $v(t) = n$, то число работающих $N - n$, и значит, интенсивность перехода в восстанавливаемое состояние будет $(N-n)\lambda$. Аналогично, интенсивность перехода в рабочее состояние $n\mu$. Так что суммарная интенсивность изменения состояний равна

$$q(n) = Q(n, +1) + Q(n, -1) = (N-n)\lambda + n\mu = N\lambda - n(\lambda - \mu). \quad (19)$$

Заметим, что $q(0) = N\lambda$ и $q(N) = N\mu$ задают интенсивности выхода из отражающих граничных состояний 0 и N соответственно.

Марковский процесс обслуживания $v(t)$, $t \geq 0$, с интенсивностями (18) описывает *марковское случайное блуждание на отрезке $[0, N]$ с отражающими экранами в точках 0 и N* .

В книге В.Феллера этот процесс исследован достаточно подробно. Нас интересует аппроксимация этого процесса при $N \rightarrow \infty$. И значит малый параметр серии: $\varepsilon = N^{-1} = 1/N$. Формулы (18), с учетом соотношения $\varepsilon = N^{-1}$, приобретают вид:

$$Q(u, +1) = \varepsilon(1-u)\lambda, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad u = n/N, \quad Q(u, -1) = \varepsilon u\mu, \quad (20)$$

таким образом, нормированный процесс обслуживания

$$v_\varepsilon(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon) = v(Nt)/N \quad (21)$$

задается в фазовом пространстве состояний $E_N = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, 1\}$ интенсивностями переходов ($u = \varepsilon n \in E_N$):

$$Q_\varepsilon(u, +\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\lambda(u), \quad Q_\varepsilon(u, -\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\mu(u). \quad (22)$$

Здесь

$$\lambda(u) = (1-u)\lambda, \quad \mu(u) = u\mu. \quad (23)$$

Теперь мы можем применить к нормированному процессу $v_\varepsilon(t)$ алгоритмы усреднения и диффузионной аппроксимации. Прежде всего вычисляем скорость сноса по формуле (4):

$$C(u) = \lambda(u) - \mu(u) = \lambda - u(\lambda + \mu). \quad (24)$$

Находим эквilibриум p из уравнения

$$C(\rho) = 0, \quad \rho = \lambda/(\lambda + \mu). \quad (25)$$

Алгоритм усреднения дает соотношение

$$v(Nt)/N \Rightarrow \rho, \quad N \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Далее применяем алгоритм диффузионной аппроксимации (формулы (14)—(16)). При этом малый параметр серии выбирается соотношением $\varepsilon = 1/\sqrt{N}$, так что в АДА $\varepsilon^2 = 1/N$. И значит, формула (17) приобретает вид

$$v(Nt) \cdot N \sim \rho + \zeta_0(t) \cdot \sqrt{N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad t \geq 0,$$

или же в более удобной форме,

$$v(Nt) \sim N\rho + \zeta_0(t) \cdot \sqrt{N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Диффузионный процесс типа Орнштейна-Уленбека задается параметрами сноса (15)

$$a = C'(\rho) = -(\lambda + \mu) \quad (28)$$

и дисперсии (16)

$$B = \lambda(\rho) + \mu(\rho) = 2\lambda\mu/(\lambda + \mu). \quad (29)$$

Следует заметить, что исходный процесс обслуживания $v(t)$, $t \geq 0$ имеет стационарное распределение, которое является бернуллиевым с параметрами $Np = \rho$. В алгоритме диффузионной аппроксимации диффузионный процесс $\zeta_0(t)$, $t \geq 0$ с параметрами a и B имеет стационарное нормальное распределение с параметрами 0,

$$\sigma^2 = B/a = 2\lambda\mu/(\lambda + \mu)^2.$$

Так что, применяя АДА к процессу обслуживания (27), получаем аппроксимацию бернуллиевого нормального распределения с параметрами $(N\rho, \sigma^2/N)$ в соответствии с предельной теоремой Муавра-Лапласа. Последний факт может служить косвенной проверкой правильности применения АДА.

Разумеется, примерами, приведенными в нашей книге [I - 22], не ограничиваются возможности применения АДА к другим, более сложным стохастическим системам. Например, в работе [III - 219] приведено, на мой взгляд, интересный подход к анализу переходного режима к установившемуся состоянию, которое описывается стационарным распределением.

Проблема устойчивости динамических систем с марковскими переключениями

В Черновицком университете в течении многих лет работал математик и интересный человек Е.Царьков. Талант может проявляться в различных областях. Например, Женя Царьков был одно время артистом; обладал он и замечательными природными способностями кулинара. Основная его научная деятельность была посвящена проблемам

устойчивости стохастических систем с запаздыванием. После иницирующих работ И.Я.Каца и Н.Н.Красовского (1962 г.) в монографии Р.З.Хасьминского ("Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров", М., Наука, 1969 г.) в значительной степени систематизировал теорию устойчивости марковских стохастических систем. Особо следует выделить работы И.И.Гихмана и его ученика А.Я.Дороговцева, в которых была исследована устойчивость решений дифференциальных уравнений со случайными возмущениями. Работы Е.Царькова в какой-то мере пересекались с работами И.Гихмана, и я решил, что Женя должен показать свои результаты И.Гихману с целью получить его одобрение на защиту докторской диссертации. Я был изрядно удивлён: поездка Е.Царькова в Донецк оказалась бесполезной.

Спустя некоторое время, будучи в Донецке, я выяснил, что Е.Царьков повёл себя весьма странным образом: вместо того, чтобы обсуждать свои результаты с И.Гихманом, он проводил беззаботно время во встречах с нашим общим другом, бездельником и хвастуном А.Ш. Пришлось мне уговаривать И.Гихмана, что это — мимолётное явление, что Е.Царьков — серьёзный математик и пора его выпускать в доктора наук. В итоге, Е.Царьков защитил в 1982 г. докторскую диссертацию, что послужило для него хорошим импульсом в дальнейшем творчестве. Общаясь с Е.Царьковым, я не мог не заинтересоваться проблемой устойчивости стохастических систем. Вскоре я придумал для себя задачу. Поскольку я знал, как доказывать теоремы усреднения для стохастических систем, используя проблемы сингулярного возмущения приводимо-обратимых операторов (см. Случайные эволюции), то, почему бы, заодно, не установить устойчивость исходной системы при условии устойчивости усреднённой системы? Мне показалось странным, что эта естественная постановка проблемы устойчивости не рассматривается в известных мне работах. Не имея необходимых познаний в теории устойчивости, я решил сначала проштудировать основную литературу, прежде чем приступить к анализу поставленной проблемы. Собрав необходимую литературу, портативный телевизор и лыжи, я отправился на две недели в пансионат "Феофания" — место, знакомое для меня еще по работе в вычислительной лаборатории. Две недели — срок небольшой, я познал только азы теории устойчивости, что было явно недостаточно для активного использования её в творческой работе. Эксперимент пришлось повторить. На следующий год я снова зимой поехал в академический пансионат, теперь в Пушче-Водице, замечательном лесном массиве под Киевом. Там и закончил я своё образование по теории устойчивости и довольно скоро вчерне получил желаемый результат. Однажды, в беседе со своим учеником Романом Бобриком, который занимался проблемами устойчивости решений дифференциальных уравнений со случайными возмущениями, я узнал, что существует работа Papaniolaou, Blankenship (1978 г.), в

которой рассматривается проблема устойчивости в форме, аналогичной моей, но только в условиях диффузионной аппроксимации. Эта работа существенно обогатила мои познания, и вскоре я решил представить заметку в "Доповідах" (III — 178, 1990), а заодно и выступить на юбилейном симпозиуме (посвящённом 60-летию А.В.Скорохода), который происходил в живописном уголке Украинских Карпат. Надо было видеть выражение лица Е.Царькова! На нём так и светилась мысль: "Да ведь я всё это умею делать не хуже Королюка!" Вслух же он сообщил, весьма полезную для меня информацию. Так следуя работе Papanićolaou, Blankenship, я разделил условия на функцию Ляпунова и на функцию, определяющую скорость эволюционной системы. А этого делать не следовало, потому что условия на функцию Ляпунова выглядят неестественными, более того, ими нельзя воспользоваться в случае линейных систем, а значит, и квадратичной функцией Ляпунова.

Спасибо, Женья! Следующая статья в "Українському математичному журналі" (III — 188, 1991) была с усовершенствованными условиями. А дальше, как я понимаю, Е.Царьков взял на вооружение поставленную мной проблему и в последующие годы получил (и опубликовал, и доложил на конференциях) ряд интересных результатов. Более того, вместе с ним мы сумели заставить одного из его учеников, Михаила Свердана, защитить докторскую диссертацию, в которой аналогичная проблема решалась для систем с импульсным случайным воздействием. Кстати, и на эту тему у меня есть совместный результат с одним из моих туркменских учеников. Я не остался в накладе. Дружба с Михаилом Сверданом — это светлые времена в моей жизни. Кроме того, у меня есть своя законченная "грядка" — схема фазового укрупнения переключающего процесса. Так что в Украинском математическом журнале (III — 212, 1998) появилась ещё одна моя статья, в которой проблема устойчивости решается в условиях диффузионной аппроксимации так же, как и в работе Papanićolaou, Blankenship, но при фазовом укрупнении переключающего процесса. Замечательным и удивительным моментом в этой работе является проблема сингулярного возмущения, рассматриваемая для ряда Лорана третьей степени! Мне пришлось повозиться летом 1997 г. накануне Боголюбовских чтений, где я впервые доложил эти результаты. Удивительным фактом всей этой истории является то, что впервые такая проблема была поставлена и решена Н.Н. Боголюбовым в 1945 г., но конечно же, для детерминированных динамических систем, допускающих эргодическое усреднение по времени. Я узнал об этом случайно из брошюры Ю.А.Митропольского и А.М.Самойленка, в которой приведена более общая теорема, принадлежащая А.М.Самойленку, но обозначенная почему-то как следствие (?) из теоремы Боголюбова. Чрезмерная скромность или поклонение перед авторитетом Н.Н.Боголюбова?

Часть 3. Лекции

Процеси марковського відновлення в схемі апроксимації

1. Вступ. Добре відоме широке застосування випадкових процесів з незалежними приростами (ПНП) як стохастичних моделей в різноманітних галузях, зокрема у фінансовій та актуарній математиці. Завдяки марковській властивості та аналітичному представленню породжуючого оператора (генератора) відповідного марковського процесу, аналітичний та асимптотичний аналіз функціоналів від ПНП успішно розвивається в різних напрямках, зокрема, з використанням методів *факторизаційних тотожностей* (ФТ). Свого часу я також приймав участь в розвитку методу ФТ в граничних задачах для випадкових блукань [1-1].

Згодом мої інтереси сконцентрувались на асимптотичному аналізі *випадкових еволюцій* (ВЕ) в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Ефективним аналітичним методом асимптотичного аналізу виявився метод розв'язку *проблем сингулярного збурення* (ПСЗ) зведено оборотних операторів [II - 2].

Природним узагальненням марковських моделей стохастичних систем (СС) є напівмарковські (НМ) моделі, що визначаються процесами марковського відновлення (ПМВ). Це означає, що замість показникового розподілу моментів відновлення (зміни станів) використовуються довільні функції розподілу.

Дослідження НМ моделей СС у багатьох частинних випадках врешті-решт зводиться до аналізу марковських моделей.

При цьому аналітичний аналіз НМ моделей значно ускладнюється (див. [III - 3]). Так, напівмарковська модель випадкових блукань зводиться до аналізу парних систем інтегральних рівнянь на півосі, які в загальному випадку і досі не мають явних аналітичних розв'язків. Хоча в багатьох окремих ситуаціях така система допускає (більш-менш) явне зображення розв'язку, до якого можуть бути застосовані методи асимптотичного аналізу.

Взагалі, складні явні формули представлення тих чи інших функціоналів від стохастичних процесів мають сенс лише тоді, коли вони дозволяють ефективно реалізувати асимптотичний аналіз, який значно спрощує опис СС.

Маючи у своєму арсеналі могутній метод асимптотичного аналізу, оснований на розв'язку ПСЗ, я намагався сформулювати задачі аналізу НМ моделей СС так, щоб мати можливість застосовувати метод ПСЗ.

Спочатку мені це вдалося реалізувати у схемі усереднення [III - 203], потім у схемі дифузійної апроксимації [III—228]. Нарешті виявилось, що

метод ПСЗ може бути застосований і у схемі пуассонівської апроксимації (СПА). Справа в тому, що найбільш розвинутий аналіз випадкових блукань створений якраз для складного пуассонівського процесу — класичної моделі страхового ризику (СР). Моєю "лебединою" мрією завжди було реалізувати аналіз НМ моделей СР, використовуючи метод ПСЗ.

Тепер я можу пояснити, як ця проблема розв'язується.

2. Напівмарковська модель процесу страхового ризику.

Зауважимо, що існують різноманітні узагальнення класичної пуассонівської моделі процесу СР. Ми будемо розглядати НМ модель, що визначається суперпозицією двох процесів відновлення

$$\zeta(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu^+(t)} \beta_k^+ - \sum_{k=1}^{\nu^-(t)} \beta_k^-, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Процеси відновлення

$$\nu^\pm(t) := \max\{n: \tau_n^\pm \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

визначаються двома послідовностями позитивних випадкових величин $\alpha_k^\pm$, $k \geq 1$, незалежних у сукупності і однаково розподілених для різних $k \geq 1$:

$$P_\pm(t) = P\{\alpha_k^\pm \leq t\}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Послідовності стрибків процесу $\beta_k^\pm$, $k \geq 1$, також незалежних у суперпозиції та однаково розподілених при різних $k \geq 1$ позитивних випадкових величин задаються функціями розподілу

$$G_\pm(u) = P\{\beta_k^\pm \leq u\}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Суперпозиція двох ПВ (2) визначається ПМВ k_0 , τ_0 , $n \geq 0$ у розширеному просторі станів $E = E_+ \cup E_-$, $E_\pm = \{\pm, x \geq 0\}$. Вкладений ланцюг Маркова k_n , $n \geq 0$, задається ймовірностями переходу

$$P(x, dy) = \begin{bmatrix} P_+(x-dy) & P_+(x+dy) \\ P_-(x+dy) & P_-(x-dy) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Важливою властивістю ВЛМ k_n , τ_n , $n \geq 0$ є існування стаціонарного розподілу, що має щільності

$$P_\pm(t) = \bar{P}_\pm(t)/p, \quad p = p_+ + p_-, \quad p_\pm = E\alpha^\pm. \quad (6)$$

Вкладений процес ризику визначається стохастичним співвідношенням

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + I(k_{n+1} \in E_+) \beta_{n+1}^+ - I(k_{n+1} \in E_-) \beta_{n+1}^-, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Тут, як завжди, $i(\lambda)$ — індикатор випадкової події A .

Очевидно, що розширений ПМВ k_n , τ_n , $n \geq 0$ є ланцюгом Маркова, який можна характеризувати генератором

$$L\varphi(u, x) = E[\varphi(\zeta_{n+1}, \kappa_{n+1}) | \zeta_n = u, \kappa_n = x] - \varphi(u, x). \quad (8)$$

Нескладні обчислення дають генератор у такому вигляді:

$$L\varphi(u, x) = [PG - I]\varphi(u, x), \quad (9)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_+ & 0 \\ 0 & G_- \end{bmatrix}, \quad G_{\pm}\varphi(u) = \int_0^{\infty} G_{\pm}(dv)\varphi(u \pm v), \quad (10)$$

Тут оператор P задається ймовірностями переходу (5). В явному вигляді генератор L задається виразом

$$\begin{aligned} & \int_0^t P_{\pm}(ds) \int_0^{\infty} G_{\pm}(dv) \varphi_{\pm}(u \pm v, t-s) \\ & + \int_t^{\infty} P_{\pm}(ds) \int_0^{\infty} G_{\mp}(dv) \varphi_{\mp}(u \mp v, t-s) - \varphi_{\pm}(u, t) \end{aligned}, \quad (11)$$

що є якраз лівою частиною парної системи інтегральних рівнянь на півосі.

Далі використовується трансформоване представлення генератора

$$L = Q + L_0, \quad Q := P - I, \quad L_0 := P[G - I]. \quad (12)$$

Тут Q є генератором ВЛМ k_n , $n \geq 0$. Це тривіальне перетворення генератора L розширеного ПМВ істотно змінює точку зору на генератор. Тепер він є результатом збурення генератора ВЛМ Q за допомогою оператора L_0 , що характеризує першу компоненту ζ_n , $n \geq 0$, тобто випадкове блукання.

3. Напівмарковський процес ризику в схемі серій. Для того, щоб мати можливість асимптотичного аналізу СС, треба певним чином ввести малий параметр серії $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Від того, як параметр серії введено у СС, залежить, якою буде схема апроксимацій. Ми розглянемо три схеми: схему усереднення, схеми дифузійної та пуассонівської апроксимацій.

3.1. Схема усереднення. Найпростішою, звичайно, є схема усереднення, що є аналогом закону великих чисел. Стохастична еволюція системи апроксимується детермінованою еволюцією.

Напівмарковська модель процесу ризику у схемі серій задається в такій формі:

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = u + \varepsilon \left[\sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \beta_n^+ - \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \beta_n^- \right], \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Відповідно, вкладений процес ризику задається генератором

$$L^{\varepsilon} = Q + L_0^{\varepsilon}, \quad L_0^{\varepsilon} := P[G^{\varepsilon} - I]. \quad (2)$$

Тут інтегральний оператор G^{ε} має вигляд :

$$G_{\pm}^{\varepsilon}\varphi(u) = \int_0^{\infty} G_{\pm}(dv)\varphi(u \pm \varepsilon v). \quad (3)$$

Отже, на гладких тест-функціях $\varphi(u)$ маємо асимптотичне представлення

$$L^{\varepsilon}\varphi(u, x) = Q\varphi(u, x) + \varepsilon Q_1 P\varphi(u, x) + \varepsilon \theta_L^{\varepsilon} \varphi. \quad (4)$$

$$Q_1^\pm \varphi(u) = \pm b_\pm \varphi'_u, \quad b_\pm := E\beta_1^\pm. \quad (5)$$

Залишковий оператор θ_L^ε задовольняє умову

$$\|\theta_L^\varepsilon \varphi(u)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in C^2(R). \quad (6)$$

Проблема сингулярного збудження формулюється для "зрізаного" оператора $L_\varepsilon^0 := \varepsilon^{-1} Q + Q_1$. Використовуючи розв'язок ПСЗ для оператора L_ε^0 , отримуємо алгоритм усереднення НМ процесу, що визначається асимптотичним представленням:

$$L_\varepsilon^0 \varphi_\varepsilon = L_\varepsilon [\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x)] = L \varphi(u) + \theta_L^\varepsilon(x) \varphi(u). \quad (7)$$

Граничний оператор L визначається співвідношенням

$$L\Pi = \Pi Q_1 \Pi. \quad (8)$$

Проекційний оператор має вигляд

$$\Pi \varphi(x) := \int_E \rho(dx) \varphi(x) = \varphi(1(x)), \quad 1(x) \equiv 1. \quad (9)$$

Залишковий оператор в (7) задовольняє умову (6). Обчислення за формулою (8) з урахування представлення (5) оператора P та стаціонарного розподілу (6) ВЛМ дають вираз граничного оператора

$$L \varphi(u) = C \varphi'(u), \quad C = b/\Lambda, \quad \Lambda = \lambda_+ + \lambda_-, \quad (10)$$

$$\lambda_\pm = 1/p_\pm, \quad p_\pm = E\alpha_1^\pm.$$

Граничний оператор (3,10) визначає детерміновану еволюцію зі швидкістю $C = b/\Lambda$:

$$du_t/dt = C, \quad (11)$$

тобто

$$u_t = u_0 + Ct, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Зауважимо, що параметр b в (10) визначає середній приріст процесу ризику за один стрибок, а параметр Λ задає середню інтенсивність стрибків. Отже, середня швидкість $C = b/\Lambda$ усередненого процесу визначає асимптотичну поведінку стрибкового процесу ризику

$$\zeta_t^\varepsilon = u + \varepsilon \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \beta_n^+ - \varepsilon \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \beta_n^-, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Теорія граничних теорем для випадкових процесів з асимптотичного представлення (7) розв'язку ПСЗ дозволяє зробити такі висновки.

Висновок 1. Має місце слабка збіжність

$$\zeta_t^\varepsilon \Rightarrow u_t, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Апроксимація процесу СР (3.1) визначається з рівності

$$\zeta^\varepsilon(t) = \zeta_{\varepsilon\nu(t/\varepsilon)}^\varepsilon. \quad (15)$$

Згідно з теоремою відновлення для рахуючого процесу

$$\varepsilon\nu(t/\varepsilon) \rightarrow \Lambda t, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Суперпозиція процесів (3.15) з урахуванням (3.14) та (3.16) дає таке твердження.

Висновок 2. Має місце слабка збіжність

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow u(t) = u_{\Lambda t} = u_0 + bt, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

3.2. Схема дифузійної апроксимації. НМ модель процесу ризику задається у такій формі кфкф

$$\zeta^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{n=1}^{v(t/\varepsilon^2)} \beta_n^+ - \varepsilon \sum_{n=1}^{v(t/\varepsilon^2)} \beta_n^-, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

Вкладений процес СР задається генератором

$$L^\varepsilon = Q + L_0^\varepsilon, \quad L_0^\varepsilon := P[G^\varepsilon - I] \quad (19)$$

Інтегральний оператор G^ε - той же самий, що і в схемі усереднення:

$$G_\pm^\varepsilon \varphi(u) = \int_0^\infty G_\pm(dv) \varphi(u \pm \varepsilon v). \quad (20)$$

Але тепер на гладких тест-функціях будемо асимптотичний розклад генератора (2)

$$L^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1 P + \varepsilon^2 Q_2 P + \varepsilon^2 \theta_L^\varepsilon. \quad (21)$$

Тут Q_1 , — той же самий, що й у схемі усереднення (5),

$$Q_2^\pm \varphi(u) = \frac{1}{2} C_\pm \varphi''(u), \quad C_\pm = E(\beta_1^\pm)^2. \quad (22)$$

Залишковий оператор θ_L^ε задовольняє умову (6).

Тепер ПСЗ формулюється для "зрізаного" оператора

$$L_\varepsilon^0 = \varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} Q_1 P + Q_2 P \quad (23)$$

при додатковій умові балансу (!)

$$b = b_+/p_+ - b_-/p_- = 0. \quad (24)$$

Розв'язок ПСЗ для оператора L_ε^0 в (23) при умові балансу (24) є алгоритмом дифузійної апроксимації НМ процесу СР:

$$L_\varepsilon^0 \varphi^\varepsilon = L_\varepsilon^0 [\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x)] = L \varphi(u) + \theta_L^\varepsilon \varphi. \quad (25)$$

Граничний оператор L визначається співвідношенням:

$$L\Pi = \Pi Q_2 \Pi + \Pi Q_1 P R_0 Q_1 P \Pi. \quad (26)$$

Потенційний оператор R_0 визначається рівністю (розв'язок рівняння Пуассона) (див. [III - 104]):

$$Q R_0 = R_0 Q = \Pi - I. \quad (27)$$

Обчислення за формулою (9) з урахуванням (5), (6) та (23) дають вираз для граничного оператора

$$L \varphi(u) = \frac{1}{2} \sigma^2 \varphi''(u), \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= C + 2\sigma_1^2, \quad C = c_+/p_+ + c_-/p_-, \quad c_{\pm} = E(\beta_1^{\pm})^2 \\
\sigma_1^2 &= \Pi Q_1(x) R_0 Q_1(x) \Pi, \quad b_{\pm}(x) = E\beta^{\pm}(x) \\
\beta_1^{\pm}(x) &= [I(\kappa_1 \in E_+) \beta_1^+ - I(\kappa_1 \in E_-) \beta_1^- | \kappa_0 = x], \\
\beta^{\pm}(x) &= I(x_1 \in E_+ | x_0 = x) \beta_1^+ - I(x_1 \in E_- | x_0 = x) \beta_1^-
\end{aligned} \tag{29}$$

Граничний оператор (28)-(29) визначає дифузійний процес, що апроксимує вкладений НМ процес ризику. Перехід до процесу (18) реалізується аналогічно тому, як це було реалізовано у схемі усереднення.

Висновок 3. Має місце слабка збіжність за умови балансу (24)

$$\begin{aligned}
\zeta^{\varepsilon}(t) &\Rightarrow \zeta^0(t), \quad t \geq 0, \\
\zeta^0(t) &= \sigma^0 W(t), \quad t \geq 0, \quad \sigma^0 = \sigma \Lambda,
\end{aligned}$$

тут $W(t)$ — стандартний процес Вінера.

3.3. Схема пуассонівської апроксимації. У схемах усереднення та дифузійної апроксимації параметр серії ε введено традиційно, як масштабний коефіцієнт еволюції в евклідовому просторі. Схема пуассонівської апроксимації істотно відрізняється за способом введення параметра серії. Тепер параметризувати треба не величину стрибків, а частоту стрибків (!). Тобто параметр серії ε повинен задовольняти умови теореми Пуассона, тобто забезпечувати прямування до нуля ймовірностей "великих" стрибків стохастичної системи. Така схема вже була реалізована в роботах по аналізу "рідких подій".

Найбільш адекватно, на мою думку, умови реалізації "рідкісних подій" подано в монографії [Ж.Жакода, А.Н.Ширяева (1994), Предельные теоремы для случайных процессов], що і було використано мною в аналізі НМ моделей процесу ризику у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Процес СР задається у такій формі:

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = u + \varepsilon \sum_{n=1}^{v^+(t, \varepsilon)} \beta_n^{\varepsilon,+} - \varepsilon \sum_{n=1}^{v^-(t, \varepsilon)} \beta_n^{\varepsilon,-}, \quad t \geq 0. \tag{30}$$

Тепер функція розподілу позитивних стрибків $G_+^{\varepsilon}(u) = P(\beta_n^{\varepsilon,+} \leq u)$

залежить від параметра серії, задовольняючи умови пуассонівської апроксимації:

$$P1: \quad \int_0^{\infty} g(v) G_+^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon \left[\int_0^{\infty} g(v) G_+(dv) + \theta_g^{\varepsilon} \right], \quad g \in C_2(R_+).$$

На визначаючих міру тест-функціях класу $C_2(R_+)$

$$P2: \quad \int_0^{\infty} v G_+^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon [b_+ + \theta_b^{\varepsilon}], \quad \int_0^{\infty} v^2 G_+^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon [c_+ + \theta_c^{\varepsilon}].$$

Тут додаткові $\theta_{\bullet}^{\varepsilon}$ члени задовольняють умову знехтування:

$$\theta_{\bullet}^{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{31}$$

Тепер алгоритм пуассонівської апроксимації формулюється так:

Теорема (Пуассонівська апроксимація). При виконанні умов $P1$, $P2$ та скінченності третіх моментів випадкових величин $\beta_n^{\varepsilon,+}$, $n \geq 0$ має місце слабка збіжність до складного процесу Пуассона

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t) = u + b^0 t + \sum_{k=1}^{v^0(t)} \beta_k^0, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Детермінований зсув визначається формулами

$$b^0 = b - \Lambda b_+^0, \quad b_+^0 = \int_0^\infty v G_+^0(dv). \quad (33)$$

Функція розподілу стрибків β_k^0 , $k \geq 1$

$$G_+^0(u) = P(\beta_k^0 \leq u) = G_+(u)/g_+, \quad g_+ = G_+(+\infty). \quad (34)$$

Пуассонівський процес $v^0(t)$ визначається інтенсивністю

$$\Lambda = g_+/p_+. \quad (35)$$

Зауважимо, що в умові $P1$ міра $G_+(dv)$ не є ймовірнісна. Наприклад, нехай

$$\beta_n^{\varepsilon,+} = \begin{cases} b_+^0, & \text{з ймовірністю } \varepsilon p, \\ \varepsilon b_0^+, & \text{з ймовірністю } 1 - \varepsilon p. \end{cases}$$

Тоді

$$E\beta_n^{\varepsilon,+} = \varepsilon [b_+ + \theta_b^+], \quad b_+ = pb_+^0 + b_0^+.$$

Враховуючи властивість функцій класу $C_2(R_+)$, приходимо до висновку, що міра

$$G_+(dv) = p\delta_{b_+^0}(dv).$$

Отже,

$$G_+(\infty) = g_+ = p, \quad G_+^0(dv) = \delta_{b_+^0}(dv).$$

Тобто $\beta_k^0 = b_+^0$ з ймовірністю 1. Неперервний зсув за формулою (4), тобто

$$b^0 = b_+^0 p_+ - b_- p_-.$$

Це означає, що в даному прикладі малі стрибки εb_0^+ трансформуються у неперервний рух граничного пуассонівського процесу, а великі стрибки β_+^0 відбуваються за пуассонівським законом $v^0(t)$.

Пуассонівська апроксимація НМ моделі процесу ризику дозволяє зробити науково-природничий висновок.

Висновок. Великі виплати страхового ризику підкоряються пуассонівському закону. Тобто відбуваються за показниково розподіленім інтервалом. Оскільки показниковий розподіл має властивість відсутності післядії, передбачити великі страхові ризики неможливо.

Думаю, що такий самий висновок можна зробити відносно передбачення настання катастроф.

Нарешті, дамо асимптотичне представлення генератора розширеного ПМВ в схемі пуассонівської апроксимації, яке при виконанні умов P1, P2 має вигляд

$$L = Q + \varepsilon Q_1 P + \varepsilon \theta_i^\varepsilon.$$

Тут $Q_1 \varphi(u, x)$ визначається операторами:

$$Q_1^+ \varphi(u) = b_+ \varphi'(u) + G_+ \varphi(u) \\ G_+ \varphi(u) = \int_0^\infty G_+(dv) [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v \varphi'(u)] \quad Q_1^- \varphi(u) = -b_- \varphi'(u).$$

Далі, застосування розв'язку ПСЗ дає сформульований у теоремі 1 алгоритм пуассонівської апроксимації процесу CP,.

Зауваження. Існує ще одна задача: дифузійна апроксимацій ПМВ у схемі серій без умови балансу (!).

Задача зводиться до асимптотичного аналізу оператора

$$F^\varepsilon(x) = \int_0^\infty F_x(dt) \Gamma_{\varepsilon^2 t} \Gamma_{\varepsilon^2 t}^* D^\varepsilon(x).$$

Проблеми сингулярного збурення в аналізі стохастичних систем

1. Вступ. У 2002 році з'явилася монографія А.Скорохода та Hoppensteadt, Salehi "Random Perturbation Methods with Applications in Science and Engineering" (Springer-Verlag).

У назві монографії наголошується на методах дослідження стохастичних процесів, а не на об'єктах дослідження. Пригадую нашу давнішню суперечку: "Що важливіше в математиці результат, чи метод?" А.Скороход вважав, що найголовніше досягнення в математиці — це результат. Я завжди був переконаний, що методи аналізу є найбільш важливим доробком математиків. Тепер наші погляди зійшлися. Методи випадкових збурень є головним в аналізі стохастичних процесів в монографії А.Скорохода і Hoppensteadt, Salehi.

У 2005 році опублікована наша монографія [III — 22] з професором Технологічного університету м. Комп'єнь (Франція) N.Limnios "Stochastic System in Merging Phase Space" (World Scientific Publishing). Центральне місце в монографії, що складається з дев'яти розділів — розділ п'ятий, присвячений розв'язку проблеми сингулярного збурення для звідно-оборотних операторів.

Застосуванню розв'язків ПСЗ в аналізі стохастичних систем присвячені решта розділів нашої монографії.

Мета цієї роботи продемонструвати ПСЗ та їх застосування в аналізі стохастичних систем, що розглядаються у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$), яким визначається сингулярне збурення звідно-оборотного оператора. Таким оператором, наприклад, є генератор ергодичного (для простоти стрибкового) марковського процесу.

Стохастичні системи визначаються еволюційним рівнянням в евклідовому просторі, що породжує півгрупу операторів у банаховому просторі $B(R^d)$:

$$du^\varepsilon(t)/dt = C(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon)). \quad (1)$$

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t), x), \quad x \in E \quad (2)$$

Стохастичне збурення визначається ергодичним марковським процесом зі швидкими переключеннями, тобто стохастичні системи у схемі серій визначаються напівгрупою операторів в нормальному часі, а випадкове збурення в прискореному часі ε^{-1} або ε^{-2} , що і призводить до сингулярного збурення генератора ергодичного марковського процесу.

2. Динамічна система зі швидким марковським збуренням. Основний об'єкт дослідження - стохастична система (СС), що задається еволюційним диференціальним рівнянням в евклідовому просторі R^d , $d \geq 1$ зі швидким марковським переключенням (збуренням), яке задається ергодичним марковським процесом $\kappa := \kappa(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$. Отже, швидкість динамічної системи переключається МП з інтенсивністю порядку ε^{-1} . При фіксованих значеннях МП $x \in E$ динамічна система породжує півгрупу операторів у банаховому просторі функцій $B(R^d)$ що визначається сім'єю генераторів $C(x)$, $x \in E$:

$$C(x)\varphi(u) = C(u; x)\varphi'(u). \quad (2)$$

Основний об'єкт дослідження є *Випадкова Еволюція* (ВЕ), що задається у банаховому просторі траєкторіями динамічної системи з марковськими збуреннями.

Важливою властивістю ВЕ є те, що двохкомпонентний процес $u^\varepsilon(t)$, κ^ε , $t \geq 0$ є марковським процесом, який може бути заданим породжуючим оператором (генератором) $L^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + C(x)$, що має, очевидно, форму сингулярного збурення.

Дослідження поведінки СС на зростаючих інтервалах часу, тобто при $\varepsilon \rightarrow 0$ реалізується з використанням мартингальної характеристики двохкомпонентного МП та розв'язку ПСЗ для генератора L^ε на класі достатньо гладких тест-функцій $\varphi(u) \in C^k(R^d)$, $k \geq 1$.

3. Проблеми сингулярного збурення (класифікація та розв'язок). Існують різноманітні ситуації ПСЗ, які, взагалі кажучи, не можна класифікувати. Проте, мають місце певні логічно вичерпні варіанти ПСЗ (вони будуть представлені далі).

Класифікація ПСЗ базується на властивостях "звуженого оператора" $\hat{Q}_1$, що визначається співвідношенням:

$$\hat{Q}_1 P = P \{ \hat{Q}_1 P \}.$$

Очевидно, що $\hat{Q}_1$, діє на звуженому просторі нулів $\hat{N}_Q$ у випадку ергодичності МП з генератором Q , що має N ергодичних класів $\hat{N}_Q = R^N$.

Отже, мають місце три логічно вичерпні варіанти ПСЗ:

$$(i) \quad \hat{Q}_1 \neq \emptyset; \quad (ii) \quad \hat{Q}_1 = \emptyset; \quad (iii) \quad \hat{Q}_1$$

є зведено-оборотними. Розв'язок ПСЗ для цих трьох варіантів формулюється у вигляді Тверджень 1-3. [III — 22] (§5.2.2). Зрозуміло, що існує безліч інших варіантів ПСЗ, зокрема, наприклад, в твердженні 4 ПСЗ має третю ступінь сингулярності.

Вражаючим фактором в аналізі ПСЗ є те, що кожній проблемі сингулярного збурення можна знайти відповідну стохастичну систему, аналіз якої потребує розв'язку даної ПСЗ.

Тепер ми переходимо до аналізу СС у схемі серій з марковськими збуреннями. Спочатку розглянемо динамічну систему (ДС) зі швидкими збуреннями (1). Сім'я асоційованих ДС (2), яка залежить від стану МП $x \in E$, породжує півгрупу операторів $C_t(x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, у банаховому просторі $B(R^d)$, що задається генераторами $C(x)$, $x \in E$ (3).

Двохкомпонентний МП

$$u^\varepsilon(t), \quad \kappa_\varepsilon := \kappa(t/\varepsilon)$$

задається генератором $L^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + C(x)$, що має форму сингулярного збурення.

Застосовуючи розв'язок ПСЗ з Рг. 1 маємо асимптотичне представлення на збуреній тест-функції $L^\varepsilon \varphi^\varepsilon = L\varphi + \theta^\varepsilon(x)$ із нехтуваним членом:

$$\|\theta^\varepsilon(x)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Розвинуті методи доведення граничних теорем для марковських процесів, дозволяють зробити такий висновок.

Асимптотичний розв'язок ПСЗ $L^\varepsilon \varphi^\varepsilon = L\varphi + \theta^\varepsilon(x)$ φ на досить багатому класі тест-функцій забезпечує збіжність $u^\varepsilon(t) \Rightarrow u(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (в певному сенсі). Граничний процес $u(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором L .

Для системи (1) маємо:

$$L\varphi(u) = \hat{C}(u)\varphi'(u),$$

де усереднена швидкість

$$\hat{C}(u) = \int_E \pi(dx) C(u; x).$$

Легко зрозуміти, що генератор L породжує півгрупу, яка визначається розв'язком еволюційного рівняння: $du(t)/dt = C(u(t))$.

Так, розв'язок ПСЗ у Твердженні 1 приводить до принципу усереднення для ДС з марковськими збуреннями.

Найбільш цікавою є проблема вивчення асимптотичної поведінки флуктуацій СС, які цілком природно описуються марковським дифузійним процесом.

Розглянемо ту ж саму ДС

$$du^\varepsilon(t)/dt = C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon^2)), \quad (4)$$

але тепер з прискореними переключеннями порядку ε^{-2} та при додатковій умові балансу: $PC(u, x) = 0$.

З додаткових (апріорних) міркувань швидкість ДС розглянемо у такому вигляді:

$$C^\varepsilon(u; x) = \varepsilon^{-1}C(u; x) + C_1(u; x).$$

Тепер двохкомпонентний МП

$$u^\varepsilon(t), \quad \kappa_t^\varepsilon = \kappa(t/\varepsilon^2)$$

характеризується генератором

$$L^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}C(x) + C_1(x),$$

що має сингулярність другого степеня при додатковій умові балансу $PC(x) = 0$.

Використовуючи розв'язок ПСЗ у Твердженні 2 отримуємо асимптотичне представлення

$$L^\varepsilon = \dot{L} + \theta^\varepsilon(x)$$

в якому

$$L = PC_1(x)P + PC(x)R_0C(x)P.$$

Далі, враховуючи, що оператори $C(x)$ та $C_1(x)$ є операторами диференціювання 1-го порядку і визначають еволюційні рівняння 1-го порядку, приходимо до висновку, що граничний оператор L визначає марковський дифузійний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$. Отже, загальні граничні теореми теорії випадкових процесів дають збіжність $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Звичайно, постає більш загальна проблема: вивчення флуктуацій відносно усередненої еволюції: $v^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - u(t)$. Методи розв'язку ПСЗ дозволяють розв'язати і дослідити цю проблему. Проте це вже пов'язано з технікою застосувань ПСЗ в аналізі СС.

І саме застосуванням ПСЗ в аналізі СС у різноманітних ситуаціях присвячена монографія [III — 22].

Особливістю викладу матеріалу в монографії полягає в тому, що спочатку (розділи 3,4) в ній наведено алгоритми фазового укрупнення та усереднення, а також дифузійної апроксимації СС, а потім вже (розділи 5,6) даються розв'язки ПСЗ та обґрунтування збіжності СС.

Отже, якщо вас цікавить, наприклад, лише алгоритм усереднення, то достатньо користуватися Розділом 3, якщо ж бажаєте дізнатися, як такий алгоритм будується — вивчайте Розділ 5.

Нарешті, якщо хочете переконатися у збіжності СС — застосуйте Розділ 6, або загальну теорію збіжності випадкових процесів, яка представлена в багатьох монографіях.

Skorokhod A.V., Hoppenstead F.C., Salehi H. (2002) Random Perturbation Methods with Applications in Science and Engineering, Springer-Verlag.

Vladimir S. Koroliuk, Nikolaos Limnios Stochastic Systems in Merging Phase Space - World Scientific Publishing, 2005. -331 p.

Еволюція стохастичних систем. Дифузійний феномен*

Для стохастичних процесів накопичення споживання застосовуються дві схеми апроксимації: усереднення й дифузійна апроксимація.

Дифузійний феномен полягає в тому, що апроксимуюча дифузія є завершальним етапом апроксимації. Крім того, на відміну від реальності стохастичних систем, дифузійна апроксимація не має природної інтерпретації, проте її властивості достатньо ефективно відображають реальні еволюційні стохастичні системи.

Стохастичні системи накопичення та споживання визначаються двома функціями інтенсивностей моментів накопичення $a_+(u)$ та моментів споживання $a_-(u)$ та двома функціями розподілу об'ємів накопичення $G_+(u) = P(a_+ \leq u)$ та споживання $G_-(u) = P(a_- \leq u)$.

На далі будемо припускати, що об'єми споживання та накопичення фіксовані й рівні 1: $a_{\pm} = 1$ з імовірністю 1. Це припущення спрощує подальший розгляд проблеми дифузійної апроксимації стохастичних мереж, не зменшуючи істотно її загальності.

Еволюція марковської стохастичної системи з функціями інтенсивностей $a_{\pm}(u)$, $u \in R^d$, в евклідовому просторі R^d описується марковським процесом $v(t)$, $t \geq 0$, що фіксує об'єм (стан) стохастичної системи в момент часу $t \geq 0$.

Ймовірнісний зміст інтенсивностей $a_{\pm}(u)$ виражається апроксимацією ймовірностей зміни станів за малий проміжок часу $\Delta \rightarrow 0$ ($\Delta > 0$):

$$P\{v(t + \Delta) = u \pm 1 | v(t) = u\} = \Delta a_{\pm}(u) + o(\Delta) \quad (1)$$

Локальна поведінка процесу $v(t)$ описується породжуючим оператором, що породжує (генератором), що на тест-функції $\varphi(u)$, $u \in R$, приймає дійсні значення, має вигляд

$$L\varphi(u) = a_+(u)\varphi(u+1) + a_-(u)\varphi(u-1) - a(u)\varphi(u), \quad (2)$$

отут $a(u) := a_+(u) + a_-(u)$.

* Доповідь в Національному педагогічному університеті з нагоди 70- річчя ректора М.І.Шкіля. 10.12.2002.

Ймовірнісний зміст породжуючого оператора марковського процесу виражається апроксимацією математичного сподівання зміни стану процесу на тест-функції

$$E[\varphi(v(t + \Delta)) - \varphi(u) | v(t) = u] = \Delta L\varphi(u) + o(\Delta) \quad (3)$$

Використовуючи ПО, ми переходимо до аналізу поведінки марковського процесу від траєкторій процесу до функцій на траєкторіях процесу, що істотно збагачує математичний апарат аналізу.

2. Основна проблема аналізу еволюції стохастичних систем полягає у визначенні глобальних характеристик системи на зростаючих інтервалах часу, використовуючи локальні характеристики системи на малих інтервалах часу.

Незважаючи на досить просту форму локальних характеристик процесів нагромадження-споживання, що задається функціями інтенсивностей $a_{\pm}(u)$, $u \in R^d$ вивчення глобальної поведінки є досить складною проблемою. Тому, природно, виникає проблема спрощеного опису еволюції стохастичної системи, завдяки чому аналіз глобальної поведінки системи стає ефективним.

Найбільш ефективним математичним методом спрощеного аналізу, на мій погляд, є асимптотичний аналіз, що використовує операцію граничного переходу. Для асимптотичного аналізу необхідно розглядати систему в схемі серій, що визначається певним параметром серії, який за традиціями школи Крилова-Боголюбова (видатним представником якої є і наш ювіляр Микола Іванович Шкіль), будемо вважати малий параметр серії $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$).

Звісно, в першу чергу виникає проблема введення параметра серії в локальні характеристики системи. Для еволюційних стохастичних систем типу нагромадження-споживання малий параметр серії ε природно вводити у вигляді масштабування по простору й за часом, а саме

$$v_{\varepsilon}(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Відповідне перетворення локальних характеристик, а саме, породжуючого оператора буде мати вигляд:

$$\tilde{L}^{\varepsilon} \varphi(u) = \varepsilon^{-1} [a_{+}(u) \varphi(u + \varepsilon) + a_{-}(u) \varphi(u - \varepsilon) - a(u) \varphi(u)]. \quad (5)$$

Зауважимо, що тепер $u = v_{\varepsilon}(t)$.

Тепер можна переходити до асимптотичного аналізу процесу $v_{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, що визначається оператором (5). Для цього розглянемо достатньо гладку тест-функцію, що має дві обмежені неперервні похідні. Застосовуючи формулу Тейлора до виразу (5), (тут для наглядності використовується скорочене позначення

$$C(u) \varphi'(u) := \sum_{k=1}^d C_k(u) \partial \varphi(u) / \partial u_k$$

маємо асимптотичне представлення

$$L^\varepsilon \varphi(u) = C(u) \varphi'(u) + \theta^\varepsilon(u) \varphi(u), \quad (6)$$

де головний член визначається функцією швидкостей

$$C(u) = a_+(u) - a_-(u), \quad (7)$$

а залишковий член

$$|\theta^\varepsilon(u) \varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Звернемо увагу, що головний член у (6) визначає генератор детермінованої еволюційної системи

$$du(t)/dt = C(u(t)), \quad u(0) = u, \quad (9)$$

Тобто, напівгрупа

$$C_t \varphi(u) := \varphi(u(t)), \quad u(0) = u \quad (10)$$

має генератор

$$C\varphi(u) = C(u) \varphi'(u). \quad (11)$$

Маючи асимптотичне представлення (6), можна зробити висновок (користуючись сучасними методами доведення граничних теорем для випадкових процесів), що має місце збіжність при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\varepsilon v(t/\varepsilon) \Rightarrow v(t), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Таку збіжність називають усередненням: стохастичні (випадкові) зміни системи на зростаючих інтервалах часу усереднюються і перетворюються у детермінований рух, що визначається розв'язком еволюційного рівняння (9).

Зауважимо, що згідно з означенням функцій інтенсивностей в (1), середній зсув процесу $v(t)$ за одиницю часу якраз дорівнює функції швидкості руху $C(u)$ (див. (7)). Якщо усереднена система в (9) є стійкою і має єдину точку рівноваги (еквілібріум) ρ :

$$C(\rho) = 0, \quad (13)$$

тоді можна переконатися в тому, що має місце збіжність до точки рівноваги:

$$\varepsilon v(t/\varepsilon) \Rightarrow \rho, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Траєкторії стохастичної системи наближаються до точки рівноваги.

4. Зрозуміло, що в усередненні (12) або (14) втрачається істотна інформація про стохастичну систему — випадковість зміни станів. Тому, природно, виникає нова проблема вивчення флуктуацій стохастичної системи відносно рівноваги (еквілібріуму).

Треба тепер розглянути нове масштабування стохастичного процесу $v(t)$, $t \geq 0$ щоб в асимптотичному аналізі проявились випадкові флуктуації відносно рівноваги. Нове масштабування має вигляд:

$$\zeta_\varepsilon(t) := \varepsilon v(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Пояснення до (15) дуже прості. Згідно зі схемою усереднення (14) має місце збіжність:

$$\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2) - \rho \Rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Щоб виявити флуктуації треба масштабувати різницю в (15), наприклад, розділивши на ε . Тепер переносимо масштабування (15) на породжуючий оператор (2):

$$\varepsilon^2 \tilde{L}_0^{\varepsilon} \varphi(u) = [a_+(\rho + \varepsilon u) \varphi(u + \varepsilon) + a_-(\rho + \varepsilon u) \varphi(u - \varepsilon) - a(\rho + \varepsilon u) \varphi(u)] \quad (16)$$

Зауважимо, що умова (15) означає:

$$\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2) = \rho + \varepsilon \zeta_{\varepsilon}(t). \quad (17)$$

Породжуючий оператор процесу $\zeta_{\varepsilon}(t)$ будується з породжуючого оператора процесу $v(t)$. Отже, для початкової умови $\zeta_{\varepsilon}(t)=u$ маємо початкову умову $\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2) = \rho + \varepsilon u$. Цим пояснюється вираз (16).

Тепер можна реалізувати асимптотичний аналіз породжуючого оператора (16) на достатньо гладких тест-функціях $\varphi(u)$, що мають три обмежених неперервних похідних.

Застосовуючи формули Тейлора у виразі (16), припускаючи, істотно, що інтенсивності $a_{\pm}(u)$ також неперервно диференційовані, маємо асимптотичне представлення ПО процесу флуктуації (15):

$$\tilde{L}_0^{\varepsilon} \varphi(u) = u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} b(\rho) \varphi''(u) + \theta^{\varepsilon}(u) \varphi(u). \quad (18)$$

Тут використали умову (13).

Голонпий член асимптотики

$$L \varphi(u) = u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} b(\rho) \varphi''(u) \quad (19)$$

визначає дифузійний процес типу Орнштейна-Уленбека $\zeta(t)$, $t \geq 0$ а залишковий член задовольняє умові (8).

Маючи асимптотичне представлення (18), можна довести слабку збіжність флуктуацій:

$$\varepsilon v(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20)$$

Таким чином, виходить друга апроксимація стохастичної системи:

$$\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^2) = \rho + \varepsilon \zeta(t), \quad t \geq 0. \quad (21)$$

5. Дифузійний феномен апроксимації процесів нагромадження-споживання типу полягає по-перше, в тому, що ця апроксимація є завершальною. Подальших членів асимптотичного розкладу (21) не має.

По-друге, парадоксальність дифузійної апроксимації полягає в тому, що реальна стохастична система, що описується процесом нагромадження-споживання $v(t)$, $t \geq 0$, апроксимується дифузійним процесом $\zeta(t)$, $t \geq 0$, що не має фізичної інтерпретації. Стохастичне рівняння для процесу $\zeta(t)$, $t \geq 0$ має вигляд:

$$d\zeta(t) = C'(\rho)\zeta(t)dt + b(\rho)dW_t. \quad (22)$$

Отут $W_t, t \geq 0$ процес броуновського руху, траєкторії якого всюди це диференційовані функції. Швидкість зміни процесу в будь-який момент часу дорівнює нескінченності. В той же час, дифузійна апроксимація (21) на зростаючих інтервалах часу цілком спостережна. Вона визначається лише трьома параметрами-константами: точка рівноваги ρ , швидкість детермінованого зсуву

$$C'(\rho) = a_+(\rho) - a_-(\rho)$$

та дисперсія флуктуацій

$$\sigma^2(\rho) = a_+(\rho) + a_-(\rho).$$

Наприклад, процес (22) має нормальний стаціонарний розподіл (за умови $C'(\rho) < 0$). Це дає можливість ефективного обчислення стаціонарних характеристик стохастичної системи. Більше того, розглядаючи траєкторії реальної системи $v(t), t \geq 0$, як траєкторії дифузійної апроксимації можна побудувати стаціонарні оцінки параметрів $\rho, a(\rho) = C'(\rho), \sigma^2(\rho)$, тим самим повністю визначити характер глобальної поведінки стохастичної системи.

6. Дифузійний феномен зникає, якщо замість самого процесу $v_\varepsilon(t), t \geq 0$, розглядати його усереднення (по розподілу) з тест-функцією $\varphi(u), u \in R$, що визначається напівгрупою:

$$L_\varepsilon^\varphi(u) := E[\varphi(v_\varepsilon(t)) | v_\varepsilon(0) = u] =: \Phi_t^\varepsilon(u), \quad (23)$$

генератором якої є породжуючий оператор нормованого процесу накопичення-споживання (5). Детермінована еволюційна система $\Phi_t^\varepsilon(u)$ визначається розв'язком еволюційного рівняння

$$d\Phi_t^\varepsilon(u)/dt = L^\varepsilon \Phi_t^\varepsilon(u), \quad \Phi_0^\varepsilon(u) = \varphi(u). \quad (24)$$

До цього рівняння застосовні методи асимптотичного розвинення за малим параметром ε . Проте, члени асимптотичного розкладу вже не мають такої наглядної інтерпретації, як у схемі дифузійної апроксимації самої стохастичної системи.

Еволюційні системи з випадковими збуреннями

Вступ. Еволюційні системи з випадковими збуреннями є широко розповсюдженими математичними моделями стохастичних систем, що описують реальні процеси в часі у різноманітних галузях народного господарства, в техніці, фізиці та навіть у суспільних науках.

Основна проблема, що виникає при дослідженні стохастичних систем, — це вивчення поведінки системи на зростаючих інтервалах часу, що призводить до ефекту усереднення випадкових збурень.

Ефективним методом асимптотичного аналізу стохастичних систем на зростаючих інтервалах часу є метод малого параметру з використанням теорії випадкових еволюцій в банаховому просторі тест-функцій. Наша монографія "Stochastic Systems in Merging Phase Space" (WSP, I —22, 2005) присвячена систематичному вивченню стохастичних систем з використанням ефективних алгоритмів фазового укрупнення, усереднення та дифузійної апроксимації флуктуацій стохастичних систем, а також з рідкісними великими збуреннями, що у схемі усереднення призводить до апроксимації стохастичних систем процесами з локально незалежними приростами.

В даній роботі пропонується огляд основних алгоритмів асимптотичного аналізу стохастичних систем: усереднення, дифузійна апроксимація, а також пуассонівська апроксимація еволюційних систем з напівмарковськими випадковими збуреннями.

Наступний огляд значно полегшить вивчення асимптотичних алгоритмів, представлених в нашій монографії [1-22].

2. Схема усереднення. Еволюційна система з випадковими збуреннями у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) задається розв'язком еволюційного рівняння

$$du^\varepsilon(t)/dt = C(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

функція швидкості $C(u; x)$, $u \in R^d$, $x \in E$, є вектор-функцією двох аргументів: аргументу еволюційної системи u , що приймає значення в евклідовому просторі R^d , $d \geq 1$; та аргументу випадкових збурень x , що приймає значення у фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ який є повним метричним простором E з сігма-алгеброю вимірних множин $\mathcal{E}$. Вважаємо, що окремі точки x простору E належать $\mathcal{E}$.

Істотним припущенням є існування глобального розв'язку сім'ї рівнянь

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t); x), \quad x \in E. \quad (2)$$

Важливою властивістю рівнянь (2) є півгрупова властивість розв'язків:

$$u_x(t_1 + t_2; u) = u_x(t_2; u_x(t_1; u)). \quad (3)$$

Тут $u_x(t; u)$ є розв'язком рівняння (2) з початковою умовою $u_x(0; u) = u$.

Півгрупова властивість (3) породжує півгрупу операторів в банаховому просторі тест-функцій $B(R^d)$:

$$C_t(x)\varphi(u) := \varphi(u_x(t; u)), \quad t \geq 0, \quad \varphi(u) \in B(R^d). \quad (4)$$

Півгрупа операторів (4) визначається генератором

$$C(x)\varphi(u) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [C_t(x)\varphi(u) - \varphi(u)], \quad (5)$$

який задається формулою

$$C(x)\varphi(u) = C(u; x)\varphi'(u). \quad (6)$$

Тут за означенням

$$C(u; x)\varphi'(u) := \sum_{k=1}^d C_k(u; x) \partial \varphi(u) / \partial u_k \quad (7)$$

Тепер залишається визначитися з характеристизацією випадкових збурень.

Будемо розглядати, в основному, випадкові збурення, що визначаються марковським стрибковим процесом $k(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, що задається породжуючим оператором (генератором) у банаховому просторі $B(E)$ тест-функцій $\varphi(x) \in B(E)$, які приймають числові значення:

$$\mathcal{Q}\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)] \quad (8)$$

тут функція $q(x)$, $x \in E$, задає інтенсивність моментів стрибків процесу $k(t)$, $t \geq 0$, що мають показниковий розподіл; стохастичне ядро $P(x, dy)$, $x \in E$,

$dy \in \mathcal{E}$, розподіл ймовірностей переходу процесу $k(t)$ зі стану x в множину станів dy .

Марковський процес $k(t)$, $t \geq 0$, з генератором (8) може бути задано процесом марковського відновлення (ПМВ)

$$k_n, \tau_n, n \geq 0 \quad (9)$$

Перехідні ймовірності ПМВ (9) задаються напівмарковським ядром

$$\begin{aligned} Q(x, B, t) &= P(x, B) (1 - e^{-q(x)t}) = P\{\kappa_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x\} \\ &= P(\kappa_{n+1} \in B | \kappa_n = x) P(\theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x). \end{aligned} \quad (10)$$

Отже, послідовність $k_n := k(\tau_n)$, $n \geq 0$, є вкладеним ланцюгом маркова (ВЛМ) в марковський процес $k(t)$, $t \geq 0$, а моменти марковського відновлення τ_n , $n \geq 0$, задаються співвідношенням

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}; \quad n \geq 0. \quad (11)$$

Згідно з (10) інтервали між сусідніми стрибками процесу $k(t)$ мають показниковий розподіл з параметром $q(x)$, при умові, що в момент стрибка $k(\tau_n) = x$. Зауважимо, що процес $k(t)$, $t \geq 0$, є неперервним справа, отже,

$$\kappa(\tau_{n+1}) = \kappa(\tau_n + 0).$$

Тепер можна розшири поняття випадкових збурень, розглядаючи ПМВ (9), що задається напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t) = P\{\kappa_{n+1} \in B | \kappa_n = x\} P\{\theta_{n+1} \leq t | \kappa_n = x\}. \quad (12)$$

Тобто інтервали між сусідніми стрибками мають довільні функції розподілу

$$G_x(t) = P\{\theta_x \leq t\}, \quad x \in E.$$

Введемо рахуючий процес стрибків

$$\nu(t) := \max\{t: \tau_n \leq t\}, \quad (13)$$

тоді ПМВ (9) породжує напівмарковський процес

$$\kappa(t) = \kappa_{\nu(t)}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

який визначається напівмарковським ядром (12).

По аналогії з визначенням інтенсивності показникового розподілу будемо вважати:

$$q(x) := 1/g(x), \quad g(x) = E\theta_x = \int_0^\infty \bar{G}_x(t) dt, \quad \bar{G}_x(t) := 1 - G_x(t). \quad (15)$$

Далі, важливу роль в асимптотичному аналізі стохастичних систем з напівмарковськими збуреннями відіграє супроводжуючий марковський процес $k^0(t)$, $t \geq 0$, що задається генератором (8), з функцією інтенсивностей (15).

Принцип усереднення. Якщо марковський процес збурень $k(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$

то при виконанні, сформульованих вище умов має місце слабка збіжність

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow u^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Гранична еволюція $u^0(t)$, $t \geq 0$, визначається розв'язком детермінованого еволюційного рівняння

$$du^0(t)/dt = \hat{C}(u^0(t)), \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Усереднена функція швидкості визначається співвідношенням

$$\hat{C}(u) = \int_E \pi(dx) C(u; x). \quad (18)$$

Зауваження 1. Принцип усереднення (16)-18) має місце і для напівмарковських збурень за умов ергодичності супроводжуючого марковського процесу $k^0(t)$, $t \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$

3. Флуктуації динамічної системи за умови балансу. Умова балансу для динамічної системи (2.1), що визначається функцією швидкості $C(u; x)$, $u \in R^d$, $x \in E$, означає, що усереднена швидкість дорівнює тотожно нулю:

$$\hat{C}(u) = \int_E \pi(dx) C(u; x) \equiv 0. \quad (1)$$

За умови балансу (1) усереднена система зберігає сталі значення на необмеженому інтервалі часу. У зв'язку з цим виникає проблема вивчення флуктуацій динамічної системи, яку в умовах балансу (1) слід розглядати з таким нормуванням

$$du^\varepsilon(t)/dt = \varepsilon^{-1} C(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon^2)). \quad (2)$$

Нормування динамічної системи (2) можна пояснити тим, що флуктуації за умови балансу стануть помітними, якщо збільшити швидкість системи (множником ε^{-1}); крім того, усереднення флуктуацій проявиться, якщо збільшити інтервал часу спостережень (множником ε^2).

Дифузійна апроксимація динамічної системи за умови балансу. Якщо марковський процес збурень $k(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$, то за умови балансу (1) має місце слабка збіжність

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором

$$L\phi(u) = b(u)\phi'(u) + \frac{1}{2}B(u)\phi''(u); \quad (4)$$

де параметр зсуву —

$$b(u) = \int_E \pi(dx) b(u; x), \quad b(u; x) = C(u; x) R_0 C'_u(u; x); \quad (5)$$

дифузійний коефіцієнт —

$$B(u) = \int_E \pi(du) B(u; x); \quad B(u; x) = C(u; x) R_0 C(u; x); \quad (6)$$

і потенціал ергодичного марковського процесу є

$$R_0 = - \int_0^\infty [\exp Qt - P] dt, \quad P\phi(x) = \int_E \pi(dx) \phi(x). \quad (7)$$

Зауваження 2. Дифузійна апроксимація (3)—(7) має місце для напівмарковських збурень за умови рівномірної ергодичності супроводжуючого марковського процесу $k^0(t)$, $t \geq 0$, з генератором (1.8) з функцією інтенсивностей (1.15).

Зауваження 3. Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$, $t \geq 0$, задається також розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\zeta^0(t) = b(\zeta^0(t))dt + \sigma(\zeta^0(t))dW(t). \quad (8)$$

Тут $\sigma^2(u) = B(u)$, $W(t)$ — стандартний вінерівський процес.

Зауваження 4. Динамічна система за умови балансу (1) може бути задана у більш загальній формі:

$$du^\varepsilon(t)/dt = \varepsilon^{-1} C(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon^2)) + C_0(u^\varepsilon(t); \kappa(t/\varepsilon^2)). \quad (9)$$

Флуктуації динамічної системи (9) також мають асимптотичне дифузійне представлення з додатковим членом зсуву

$$b_0(u) = \int_E \pi(dx) C_0(u; x). \quad (10)$$

4. Флуктуації динамічної системи за умов усереднення. За умови усереднення динамічна система (2.1) апроксимується на зростаючих інтервалах часу порядку $O(\varepsilon^{-1})$ детермінованою динамічною системою (2.17), що визначається усередненою швидкістю (2.18).

Цілком природно постає проблема вивчення флуктуацій стохастичної системи (2.1) відносно детермінованої системи (2.17). Звичайно, флуктуації стохастичної системи слід розглядати на зростаючих інтервалах часу порядку $O(\varepsilon^2)$, тобто стохастична система визначається розв'язком еволюційного рівняння (3.2), але без виконання умови балансу (3.1).

Дифузійна апроксимація динамічної системи за умов усереднення. Флуктуації динамічної системи (3.2) відносно усередненої системи (2.17) задаються співвідношенням

$$v^\varepsilon(t) := [u^\varepsilon(t) - u^0(t)]/\varepsilon. \quad (1)$$

За умов усереднення має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow v^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2)$$

Граничний дифузійний процес $v^0(t)$, $t \geq 0$, визначається розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dv^0(t) = v^0(t) \hat{C}'(u^0(t)) dt + \sigma(u^0(t)) dW(t), \quad (3)$$

або генератором

$$L\varphi(v, u) = b(v, u)\varphi'_v(v, u) + \frac{1}{2}\tilde{B}(u)\varphi''_v(v, u) + \hat{C}(u)\varphi'_u(v, u), \quad (4)$$

де

$$b(v, u) = v\hat{C}'(u), \quad \sigma^2(u) = \tilde{B}(u), \quad \tilde{B}(u) = \int_E \pi(dx) \tilde{B}(u; x), \quad (5)$$

$$\tilde{B}(u; x) = \tilde{C}(u; x)R_0\tilde{C}(u; x), \quad \tilde{C}(u; x) := C(u; x) - \hat{C}(u). \quad (6)$$

Зауваження 5. Генератор (4) визначає двокомпонентний марковський процес $v^0(t)$, $u^0(t)$, $t \geq 0$, що задається системою рівнянь (4.3) та (2.17).

Зауваження 6. Коефіцієнт дифузії $\tilde{B}(u)$ визначається "флуктуацією швидкостей" відносно усередненої швидкості $\hat{C}(u)$, що цілком природно.

Природно також залежність коефіцієнтів дифузійного - процесу $v^0(t)$, $t \geq 0$, від усередненої траєкторії $u^0(t)$, $t \geq 0$, відносно якої визначаються флуктуації стохастичної системи (див. (4.1)).

Зауваження 7. Коефіцієнт зсуву флуктуацій $b(v, u) = v\hat{C}'(u)$ може мати цілком природне інтуїтивне тлумачення. Проблема відкрита.

5. Флуктуації динамічної системи при наявності точки рівноваги u_0 усередненої швидкості: $\hat{C}(u_0) = 0$.

За умови існування точки рівноваги u_0 усередненої швидкості:

$$\hat{C}(u_0) = 0 \quad (1)$$

та при додаткових умовах стійкості усередненої системи (2.17) траєкторії усередненої системи наближаються до точки рівноваги з ростом часу:

$$u^0(t) \rightarrow u_0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Цілком природно постає також проблема вивчення флуктуацій стохастичної системи.

Дифузійна апроксимація стохастичної системи при наявності точки рівноваги усередненої системи. В сформульованих умовах має місце слабка збіжність

$$|u^\varepsilon(t) - u_0|/\varepsilon \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Граничний дифузійний процес типу Орнштейна-Уленбека $\zeta(t)$, $t \geq 0$, визначається генератором

$$L\varphi(u) = b\varphi'(u) + \frac{1}{2} \tilde{B}\varphi''(u), \quad (4)$$

де параметр зсуву та дисперсії:

$$b = \hat{C}(u_0), \quad \tilde{B} = \tilde{B}(u_0). \quad (5)$$

Висновок 1. Граничний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, задається розв'язком рівняння

$$d\zeta(t) = b\zeta(t)dt + \tilde{\sigma}dW(t), \quad (6)$$

тут $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{B}$.

Зауваження 7. За додаткової умови стійкості усередненої системи для параметру зсуву має місце співвідношення: $b = \hat{C}(u_0) < 0$.

Отже, граничний процес $\zeta(t)$, $t \geq 0$, має стаціонарний розподіл, що задається нормальним розподілом з дисперсією $\sigma_0^2 = \tilde{\sigma}^2 / b$.

Стохастична система $u^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, що визначається еволюційним рівнянням (3.2), на зростаючих інтервалах часу наближається дифузійним процесом $\zeta(t)$, $t \geq 0$:

$$u^\varepsilon(t) \approx u_0 + \varepsilon\zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Параметри наближення (7) задаються співвідношеннями:

$$\hat{C}(u_0) = 0, \quad b = \hat{C}'(u_0), \quad \tilde{B} = \tilde{B}(u_0). \quad (8)$$

Стохастична система (3.2) з марковськими (чи напівмарковськими) переключеннями апроксимується на зростаючих інтервалах часу нормальним процесом, що визначається трьома числовими параметрами (8).

Проблема статистичного аналізу стохастичної системи зводиться до простої статистики з трьома параметрами.

6. Алгоритми асимптотичного аналізу. Асимптотичний аналіз стохастичних систем з випадковими збуреннями викладено в нашій монографії "Stochastic Systems in Merging Phase Space", WSP, (I — 22, 2005), (V.S.Koroliuk, N.Limnios). тут ми продемонструємо алгоритмічну складову асимптотичного аналізу, яка базується на розв'язанні проблем

сингулярного збурення для генератора рівномірно ергодичного марковського процесу переключень (або відповідно супроводжуючого марковського процесу у випадку напівмарковських збурень).

6.1. Схема усереднення. Стохастична система (2.1) разом з марковським процесом переключень $k(t)$, $t \geq 0$, що задається генератором (2.8) утворюють двохкомпонентний марковський процес $u^\varepsilon(t)$, $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$, що визначається генератором

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u, x) = [\varepsilon^{-1} \mathcal{Q} + C(x)] \varphi(u, x), \quad (1)$$

де

$$C(x) \varphi(u) := C(u; x) \varphi'(u). \quad (2)$$

Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (1) визначається співвідношеннями

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) = [\varepsilon^{-1} \mathcal{Q} + C(x)] (\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x)) = \mathbf{L} \varphi(u) + \theta^\varepsilon(x) \varphi(u). \quad (3)$$

Тут граничний оператор є

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} C(x) \mathbf{P} = \hat{\mathbf{C}}, \quad \hat{\mathbf{C}} \varphi(u) = \hat{\mathbf{C}}(u) \varphi'(u). \quad (4)$$

Залишковий знехтуваний член в (3):

$$|\theta^\varepsilon(x) \varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^d). \quad (5)$$

Всі ці величини можна обчислити, використовуючи формули розділу 5.2.2. монографії [1—22] (Proposition 5.1.)

Генератор (4) породжує динамічну систему (2.17). Слабка збіжність (2.18) обґрунтовується, використовуючи мартингальну характеристику двохкомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t)$, $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$, (див. [1—22], (Розділ 6)).

Зауваження 1. Звертаємо увагу на особливість розв'язку проблеми сингулярного збурення (3), яка полягає в тому, що представлення граничного оператора (4) знаходиться з умови розв'язності рівняння для збурюючої тест-функції $\varphi_1(u; x)$ (див. [1—22], (Proposition 5.1)).

Зауваження 2. Двохкомпонентний процес $u^\varepsilon(t)$, $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$, з напівмарковським процесом $k(t)$, $t \geq 0$, характеризується компенсуючим оператором (див. [1—22], (§§ 1.3.4, 3.2.1)), що має асимптотичне представлення (1) з точністю до члена, яким нехтуємо. Отже, принцип усереднення (2.16) має місце також для напівмарковських збурень стохастичної системи (2.1).

6.2. Флуктуації за умов балансу. Двохкомпонентний марковський процес $u^\varepsilon(t)$, $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$, перша компонента якого $u^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, визначається розв'язком еволюційного рівняння (3.2), характеризується генератором

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u, x) = [\varepsilon^{-2} \mathcal{Q} + \varepsilon^{-1} C(x)] \varphi(u, x). \quad (6)$$

Тепер розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (6) визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u, x) &= [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} C(x)] (\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x) + \varepsilon^2 \varphi_2(u, x)) = \\ &= L\varphi(u) + \theta^\varepsilon(x) \varphi(u) \end{aligned} \quad (7)$$

Граничний оператор є

$$L = PC(x)R_0C(x)P, \quad (8)$$

або, враховуючи вигляд (2) оператора $C(x)$,

$$L\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}B(u)\varphi''(u), \quad (9)$$

де параметри дифузії $b(u)$ та $B(u)$ визначаються формулами (3.5)—(3.6). Як і в попередньому параграфі, нехтуваний член:

$$\theta^\varepsilon(x)\varphi(u) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi \in C^3(R^d). \quad (10)$$

Зауваження 3. Вираз (8) граничного оператора обчислюється за умови розв'язності рівняння для другої збурюючої функції $\varphi_2(u; x)$ (див. [1—22] (Proposition 5.2)).

Зауваження 4. Для напівмарковських збурень використовується асимптотичне представлення компенсуючого оператора двохкомпонентного процесу $u^\varepsilon(t)$, $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$, що має представлення (6) для головної частини (без нехтуваного члена) (див. [1—22] (Proposition 3.2)).

Зауваження 5. Слабка збіжність (3.3) встановлюється за аналогічною схемою з використанням мартингальної характеристики двохкомпонентного процесу (див. [1—22], Розділ 6).

6.3. Флуктуації за умов усереднення. За умов усереднення п.2 флуктуації стохастичної системи (3.2) природно розглядати у такій формі:

$$v^\varepsilon(t) := [u^\varepsilon(t) - u^0(t)]/\varepsilon. \quad (11)$$

Тепер марковський процес визначається трьома компонентами:

$$v^\varepsilon(t), \quad u^0(t), \quad \kappa^\varepsilon(t) := \kappa(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad (12)$$

Принциповий момент полягає у визначенні генератора марковського процесу (11).

Лема 1. Марковський процес (12) визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v, u, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_\varepsilon(u, x) + \hat{C}] \varphi^\varepsilon(v, u, x), \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\varepsilon(u, x) \varphi(v) &= [C(u + \varepsilon v, x) - \hat{C}(u)] \varphi(v) = \\ &= \tilde{C}(u, x) \varphi'(v) + \varepsilon v C'_u(u, x) \varphi'(v) + \varepsilon \theta^\varepsilon \varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{C}(u, x) := C(u, x) - \hat{C}(u), \quad \hat{C} \varphi(u) := \hat{C}(u) \varphi'(u) \quad (15)$$

Отже, перший член в (13) визначає генератор Q марковського процесу $k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon^2)$, $t \geq 0$, другий член визначає генератор процесу флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) := [u^\varepsilon(t) - u^0(t)]/\varepsilon, \quad (16)$$

тобто

$$u^\varepsilon(t) = u^0(t) + \varepsilon v^\varepsilon(t). \quad (17)$$

Остання формула визначає зв'язок приростів процесів

$$\Delta u^\varepsilon(t) = \Delta u^0(t) + \varepsilon \Delta v^\varepsilon(t), \quad (18)$$

де за означенням $\Delta u(t) := u(t + \Delta) - u(t)$.

Ключовий момент — визначення приросту $\Delta u^\varepsilon(t)$ за умови фіксованих значень процесів $u^0(t) = u$, $v^\varepsilon(t) = v$ (див. (3.2)).

$$\Delta u^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} C(u + \varepsilon v, x) + o(\Delta). \quad (19)$$

Очевидно також (див. (2.17))

$$\Delta u^0(t) = \hat{C}(u) \Delta + o(\Delta). \quad (20)$$

Обчислюємо тепер приріст тест-функції:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(v) &:= \varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t)) - \varphi(v) = \varphi(v + \varepsilon^{-1} [\Delta u^\varepsilon(t) - \Delta u^0(t)]) - \varphi(v) = \\ &= \varepsilon^{-1} [\Delta u^\varepsilon(t) - \Delta u^0(t)] \varphi'(v) + o(\Delta) = \varepsilon^{-1} [C(u + \varepsilon v, x) - \hat{C}(u)] \varphi'(v) \Delta + o(\Delta). \end{aligned}$$

Отже, генератор флуктуацій $v^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ визначається формулою (13) за умов фіксованих значень $u^0(t) = u$, $v^\varepsilon(t) = v$, $k^\varepsilon(t) = x$.

Далі проблема сингулярного збурення розв'язується для зрізаного оператора

$$L_0^\varepsilon \varphi(v, u, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_\varepsilon(u, x) + \hat{C}(u, x)] \varphi(v, u, x), \quad (21)$$

де

$$\tilde{C}(u, x) \varphi(v) := \tilde{C}(u, x) \varphi'(v), \quad (22)$$

$$C_1(u, x) \varphi(u, v) := v C'_u(u, x) \varphi'_v(v, u) + \hat{C}(u) \varphi'_u(v, u). \quad (23)$$

Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (21) $L^\varepsilon \varphi = L \varphi + \theta^\varepsilon \varphi$ задається формулами

$$L = P \tilde{C}(u, x) R_0 \tilde{C}(u, x) P + P C_1(u, x) P, \quad (24)$$

Обчислення за формулою (24) з урахуванням (22) та (23) дають граничний оператор (4.4) двохкомпонентного марковського процесу $v^0(t)$, $u^0(t)$, $t \geq 0$, який має стохастичне представлення розв'язком рівняння (4.3) та (2.17).

6.4. Флуктуації при наявності точки рівноваги. На відміну від попередньої ситуації флуктуації стохастичної системи відносно точки рівноваги характеризуються двохкомпонентним марковським процесом

$$v^\varepsilon(t) := [u^\varepsilon(t) - u^0(t)]/\varepsilon, \quad k^\varepsilon(t) := k(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad (25)$$

який визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi(v, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_\varepsilon(u_0, x)] \varphi(v, x), \quad (26)$$

де

$$\tilde{C}_\varepsilon(u_0, x)\varphi(v) := \tilde{C}_\varepsilon(u, x)\varphi'(v), \quad \tilde{C}_\varepsilon(u_0, x) = C(u_0 + \varepsilon v, x) - \hat{C}(u_0). \quad (27)$$

Отже, має місце асимптотичне представлення генератора:

$$L^\varepsilon \varphi(v, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_\varepsilon(u_0, x) + \tilde{C}_1(u, x) + \theta^\varepsilon(u_0, x)] \varphi(v, x). \quad (28)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{C}(u_0, x)\varphi(v) &= [C(u_0; x) - \hat{C}(u_0)]\varphi'(v), \\ \tilde{C}_1(u_0, x)\varphi(v) &= v C'_u(u_0, x)\varphi'(v) \end{aligned} \quad (29)$$

а нехтуваний член

$$|\theta^\varepsilon(u_0, x)\varphi(v)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi(v) \in C^2(R^d).$$

Розв'язок проблеми сингулярного збурення

$$L^\varepsilon \varphi^\varepsilon = L\varphi(v) + \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v) \quad (30)$$

дає представлення граничного оператора флуктуацій

$$L = \Pi \tilde{C}(u_0; x) R_0 \tilde{C}(u, x) \Pi + \Pi \tilde{C}_1(u_0; x) \Pi. \quad (31)$$

Обчислення за формулою (31) з урахуванням (29) дає генератор (5.4) - (5.5) дифузійного процесу $\zeta(t)$, $t \geq 0$, що визначається також розв'язком стохастичного диференціального рівняння (5.6).

Зауваження 6. Аналогічні алгоритми асимптотичного аналізу флуктуацій стохастичних систем з напівмарковськими переключеннями реалізуються в асимптотичному аналізі компенсуючого оператора відповідного процесу марковського відновлення.

Диффузионная аппроксимация систем и сетей обслуживания

Введение.⁴

Основная проблема состоит в том, чтобы выделить класс марковских процессов, адекватный процессам обслуживания в системах и сетях.

Вспомогательная проблема — ввести параметр серии так, чтобы обеспечить адекватную нормировку процессов обслуживания.

Аналитическая проблема заключается в выборе адекватного метода асимптотического анализа процессов обслуживания в схеме диффузионной аппроксимации.

Разумеется, все три перечисленные проблемы взаимосвязаны между собой.

1. Ближе всего к удачному разрешению проблем был Е.А.Лебедев. Однако он перестарался, опираясь на предельную теорему И.И.Гихмана о сходимости немарковских процессов к марковским.

⁴ Работа возникла в связи с опубликованной монографией В.В.Анисимова и Е.А.Лебедева "Стохастические сети обслуживания. Марковские модели", (1992 г.)

Класс рекуррентных процессов полумарковского типа (РППМТ) Анисимова также чересчур широкий для анализа марковских систем и сетей обслуживания.

Я совершенно убежден, что метод характеристических функций в проблемах усреднения и диффузионной аппроксимации далеко не адекватный этим проблемам.

2. В настоящее время имеется наиболее подходящая теорема А.В.Скорохода о сходимости к диффузионным процессам, опубликованная в книге "Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений" (1987 г.). Теорема Скорохода, по существу, является детализацией теоремы Гихмана.

Мы будем использовать теорему Скорохода:

Теорема (А.В.Скороход). Пусть выполнено следующее условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M_x \varphi_1(\zeta_n(t_1)) \dots \varphi_m(\zeta_n(t_m)) [\varphi_{m+1}(\zeta_n(t+h)) - \varphi_{m+1}(\zeta_n(t))] - h L_{\varphi_{m+1}}^0(\zeta_n(t))| = o(h)$$

и, кроме того, сходятся начальные значения $\zeta_n(0) \Rightarrow \zeta^0$

Тогда $\zeta_n(t) \Rightarrow \zeta^0(t)$ т.е. к марковскому процессу с производящим оператором L_{φ}^0 .

3. Модельная предельная теорема. В книге И.И.Гихмана, А.В.Скорохода "Теория случайных процессов" (т.2, с.27) в конечномерном евклидовом пространстве введен класс марковских процессов аппроксимируемых на малых промежутках времени процессами с независимыми приращениями. При этом сказано, что "классы марковских процессов можно определить, наделяя их вероятности перехода свойствами, отражающими интуитивные представления о характере движения системы в фазовом пространстве" (с.26). По-видимому, эти слова принадлежат И.И.Гихману, который всегда ощущал "физическую" природу математических теорий и умел передавать их в своём изложении.

К сожалению, указанный класс марковских процессов с локально независимыми приращениями не обсуждается в книге. В прочем он появляется на с.50 в другом качестве, как *слабо дифференцируемые марковские процессы в широком смысле в евклидовом пространстве R^N* . Там же приведен производящий оператор таких процессов, который я представляю в более компактной форме:

$$L_t \varphi(x) = \int_{R^N} Q_t(x, dy) \varphi(x+y) - q_t(x) \varphi(x) + C(t, x) \varphi'(x) + \frac{1}{2} B(t, x) \varphi''(x), \quad (1)$$

где положительное ядро $Q_t(x, dy)$ задает интенсивности величины скачков; $q_t(x) = Q_t(x, R^N)$ — интенсивность скачка в состоянии x ;

$$C(t, x)\varphi'(x) := \sum_{k=1}^N C_k(t, x)\partial\varphi(x)/\partial x_k;$$

$$B(t, x)\varphi''(x) := \sum_{k,r=1}^N B_{kr}(t, x)\partial^2\varphi(x)/\partial x_k\partial x_r.$$

Таким образом, решение основной проблемы выбора класса марковских процессов, описывающих процессы обслуживания, завершено. В производящем операторе (1) *исключается диффузионная составляющая*.

Остающиеся два члена в (1), следуя И.И.Гихману, имеют следующую "физическую" интерпретацию:

$$Q_t\varphi(x) := \int_{R^N} Q_t(x, dy)\varphi(x+y) - q_t(x)\varphi(x) \quad (2)$$

- производящий оператор скачкообразного марковского процесса $v(t)$, а

$$C_t\varphi(x) := C(t, x)\varphi'(x) \quad (3)$$

- производящий оператор детерминированной эволюции $p(t)$, которая определяется задачей Коши

$$d\rho(t)/dt = C(t, \rho(t)), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (4)$$

В итоге, производящий оператор L , задает (локально) марковский процесс

$$\zeta(t) = v(t) + \rho(t). \quad (5)$$

На самом деле, сумме двух марковских процессов не соответствует сумма их производящих операторов. Однако, центрированные процессы обслуживания такое представление (5) как раз имеют. При этом процесс $v(t)$ — однородный марковский скачкообразный, и в то же время процесс $\zeta(t)$ уже неоднородный по времени с производящим оператором L_t . Так что, при выборе адекватного класса марковских процессов для описания процессов обслуживания надо было преодолеть *стереотип "однородности"* процессов обслуживания.

Теперь перейдем к решению второй проблемы: введение параметра серии, в качестве которого я, конечно, предлагаю малый параметр $\varepsilon > 0$. В этом случае можно воспользоваться предыдущим опытом формирования процессов обслуживания в задачах диффузионной аппроксимации. Думаю, что приоритет здесь установить невозможно.

Итак, нормированный процесс обслуживания в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon > 0$ задается в следующем виде:

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1}\rho(t). \quad (6)$$

Для такого марковского процесса производящие операторы имеют вид:

$$L_t^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q_t^\varepsilon\varphi(x) - \varepsilon^{-1}C^\varepsilon(t, x)\varphi'(x), \quad (7)$$

где

$$Q_t^\varepsilon\varphi(x) := \int_{R^N} Q_t^\varepsilon(x, dy)\varphi(x+\varepsilon y) - q_t^\varepsilon(x)\varphi(x). \quad (8)$$

Далее третья аналитическая проблема асимптотического анализа нормированных процессов обслуживания решается естественным образом: надо применить формулу Тейлора в производящем операторе

L_t^ε (см.(7)) до второго члена включительно:

$$Q_t^\varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} y Q_t^\varepsilon(x, dy) \varphi'(x) + \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} y^* y Q_t^\varepsilon(x, dy) \varphi''(x) / 2 + o(\varepsilon^2) \quad (9)$$

Введем обозначения для первых двух моментов скачков:

$$b^\varepsilon(t, x) := \int_{\mathbb{R}^N} y Q_t^\varepsilon(x, dy) \text{ — вектор функция;} \quad (10)$$

$$B^\varepsilon(t, x) := \int_{\mathbb{R}^N} y y^* y Q_t^\varepsilon(x, dy) \text{ — матрица-функция.} \quad (11)$$

Теперь осталось сбалансировать разложения функций c^ε , b^ε и B^ε с учетом множителей в представлении (7). Таким образом, мы приходим к формулировке модельной предельной теоремы.

Теорема М. Пусть локальные характеристики марковских процессов $\zeta^\varepsilon(t)$ $\varepsilon > 0$ с производящими операторами (7) имеют следующие асимптотические представления:

$$c^\varepsilon(t, x) = c^0(t, x) + \varepsilon c(t, x) + o_\varepsilon, \quad b^\varepsilon(t, x) = b^0(t, x) + \varepsilon b(t, x) + o_\varepsilon, \quad (12)$$

$$B^\varepsilon(t, x) = B(t, x) + \theta_\varepsilon,$$

где

$$\|o_\varepsilon\|/\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|\theta_\varepsilon\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда при дополнительном условии баланса

$$c^0(t, x) = b^0(t, x) \quad (13)$$

и сходимости (по распределению) начальных значений $\zeta^\varepsilon(0) \Rightarrow \zeta^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место слабая сходимость (конечномерных распределений) процессов $\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t)$, $t \rightarrow 0$ к диффузионному процессу $\zeta^0(t)$ с производящим оператором

$$L^0 \varphi(x) = [b(t, x) - c(t, x)] \varphi'(x) + \frac{1}{2} B(t, x) \varphi''(x). \quad (14)$$

Чтобы поверить в теорему М, достаточно заметить, что из разложений (12) и условия баланса (13) следует асимптотическое представление производящего оператора L_t^ε на дважды непрерывно дифференцируемых функциях

$$L_t^\varepsilon \varphi(x) = L_t^0 \varphi(x) + \theta_\varepsilon \quad \text{с} \quad \|\theta_\varepsilon\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

4. Приложения модельной теоремы. Теперь имеется две возможности: либо непосредственно применять теорему М к конкретным системам и сетям обслуживания, вычисляя локальные характеристики (10) и (11) и их асимптотическое представление (12), либо сформулировать промежуточную собирательную теорему для достаточно широкого класса

систем и сетей обслуживания. Как раз второй вариант мне подсказали теоремы Анисимова (§§ 4, 6).

4.1. Однако чтобы понять смысл собирательной предельной теоремы мы рассмотрим пример применения предельной теоремы к системе типа $M|M|^\infty$ с интенсивностями входного потока и обслуживания λ и μ/ε^2 соответственно. Нормированный процесс обслуживания

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho(t), \quad \begin{cases} x = \varepsilon v - \varepsilon^{-1} \rho \\ \varepsilon^2 v = \rho + \varepsilon x \end{cases},$$

где $v^\varepsilon(t)$ – число требований в системе в момент времени t , при фиксированном значении $\zeta^\varepsilon(t) = x$ характеризуется следующими интенсивностями скачков:

$$Q_t^\varepsilon(x, 1) = \lambda, \quad Q_t^\varepsilon(x, -1) = \mu(\rho_t + \varepsilon x).$$

Следовательно,

$$b^\varepsilon(t, x) = \lambda - \mu(\rho_t + \varepsilon x) = \lambda - \mu\rho_t - \varepsilon x \mu,$$

так что $b^0 = \lambda - \mu x$, $b = -x\mu$.

Далее,

$$B^\varepsilon(t, x) = \lambda + \mu(\rho_t + \varepsilon x) = \lambda + \mu\rho_t + \varepsilon x \mu,$$

из условия баланса (13) вытекает

$$c^0(t, x) = b^0(t, x) = \lambda - \mu x.$$

Так что центрирующая функция ρ_t задается решением эволюционного уравнения

$$d\rho_t/dt = \lambda - \mu\rho_t \quad (16)$$

с начальным условием ρ_0 , откуда

$$\rho_t = \lambda/\mu + \rho_0 e^{-\mu t}.$$

Согласно теореме М. предельная диффузия задается производящим оператором

$$L_t^0 \varphi(x) = -x\mu\varphi'(x) + \frac{1}{2}B(t)\varphi''(x) \quad (17)$$

с дисперсией

$$B(t) = \lambda + \mu\rho_t = 2\lambda + \mu\rho_0 e^{-\mu t}.$$

Очевидно, что при начальном условии $\rho_0 = 0$ это означает, что $\zeta_\varepsilon(0) = \varepsilon v^\varepsilon(0) = \zeta^0$ и тогда имеет место стационарный режим диффузионной аппроксимации с дисперсией $B = 2\lambda$.

4.2. Собирательная теорема для сетей обслуживания.

Марковская сеть обслуживания (открытая) задается натуральным числом N узлов, а также интенсивностями входных потоков $\lambda(x) = (\lambda_k(x), 1 \leq k \leq N)$ и промежутками времени обслуживания в узлах $\mu(x) = (\mu_k(x),$

$1 \leq k \leq N$) здесь $x = (x_k, 1 \leq k \leq N) \in R^N$. Кроме того, задана матрица маршрутизации $P = [P_{kr}, 1 \leq k, r \leq N]$, которая предполагается неразложимой и подстохастической. Это значит, что

$$\exists k: \sum_{r=1}^N P_{kr} = 1 - P_{k0} < 1,$$

т.е. с положительной вероятностью $P_{k0} > 0$ требование покидает сеть.

Введем процесс обслуживания $v(t) = (v_k(t), 1 \leq k \leq N)$, компоненты которого $v_k(t)$ задают число требований в k - в момент t .

Теорема С. Пусть выполнены следующие условия:

1⁰) функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ непрерывно дифференцируемые;

2⁰) существует положительное решение задачи Коши

$$d\rho(t)/dt = C(\rho(t)),$$

$$C(x) := \lambda(x) + \mu(x)[P - I] \quad (18)$$

3⁰) матрица маршрутизации неразложимая и подстохастическая.

Тогда нормированный процесс обслуживания

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho(t) \quad (19)$$

слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к диффузионному процессу Орнштейна-Уленбека $\zeta^0(t)$ с производящим оператором

$$L_1^0 \varphi(x) = x C'(\rho(t)) \varphi'(x) + \frac{1}{2} B(\rho(t)) \varphi''(x), \quad (20)$$

где матрица ковариаций $B(x)$ задается соотношением

$$B(x) = 2\mu^d(x) + C^d(x) - [\mu^d(x)P + P^* \mu^d(x)], \quad (21)$$

или иначе

$$B(x) = C^d(x) - [\mu^d Q + Q^* \mu^d].$$

Здесь

$$\mu^d := [\mu_k \delta_{kr}, 1 \leq k, r \leq N]$$

— диагональная матрица с элементами вектора μ на диагонали.

Чтобы понять утверждение теоремы С достаточно выписать интенсивности скачков нормированного процесса обслуживания (19) при условии, что $\zeta^\varepsilon(t) = x$, так что $\varepsilon^2 v^\varepsilon = \rho(t) + \varepsilon x$.

Введем координатные вектора $\delta_k = (\delta_{kr}, 1 \leq r \leq N)$. Из условий функционирования сети обслуживания с очевидностью следуют формулы:

$$\begin{aligned} Q_i^\varepsilon(x, \delta_k) &= \lambda_k(\rho(t) + \varepsilon x), \quad Q_i^\varepsilon(x, -\delta_k) = P_{k0} \mu_k(\rho(t) + \varepsilon x), \\ Q_i^\varepsilon(x, \delta_r - \delta_k) &= P_{kr} \mu_k(\rho(t) + \varepsilon x) \end{aligned} \quad (22)$$

Дальнейшая процедура вычисления асимптотических разложений (12) в теореме М представляет собой лишь алгебраическую задачу.

4.3. Приложение теоремы С. Применение теоремы С к конкретным сетям обслуживания состоит в задании интенсивностей $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, а также матрицы маршрутизации P . Эта рутинная работа не требует пояснений. Мы проиллюстрируем применение теоремы С на примере суперпозиции марковских процессов. Пусть задано n независимых эргодических марковских процессов, $k_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, с конечномерным пространством значений $E = \{0, 1, \dots, N\}$. заданных производящей матрицей интенсивностей $Q = [q_{kr}]$, $0 \leq k, r \leq N$. Введем считающий векторный процесс $v(t) = (v_k(t), 1 \leq k \leq N)$, компоненты которого $v_k(t)$ задают число процессов $k_i(t)$ в состоянии k в момент времени t . И рассмотрим после этого нормированный считающий процесс

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon v(t/\varepsilon^2) - \varepsilon^{-1} \rho^0, \quad \varepsilon := 1/\sqrt{n}.$$

Применение теоремы С дает предельный диффузионный процесс Орнштейна-Уленбека $\zeta^0(t)$ со сносом $a(x) = +xQ^0 - xq_0$ и матрицей ковариаций

$$B = -[Q^0 + Q^0 *].$$

Здесь

$$\bar{x} := \sum_{k=1}^N x_k, \quad q_0 := (q_{k0}; \quad 1 \leq k \leq N),$$

ρ — стационарное распределение процессов

$$\rho Q = 0, \quad \rho^0 = (\rho_k; \quad 1 \leq k \leq N),$$

$$Q^0 := [q_{kr}; \quad 1 \leq k, r \leq N]$$

— матрица.

4.4. В заключение, остается отметить, что теоремы М и С применимы также и в диффузионной аппроксимации восстанавливаемых резервированных систем, чему посвящена огромная литература, обзор которой весьма желателен.

Статистическая модель поведения

В книге Р.Буша и Ф.Мостеллера "Стохастические модели обучаемости", Москва, 1962 (Stochastic Models for learning, 1956) развита математическая теория обучаемости, основанная на статистических моделях, которые характеризуются стационарными условиями обучаемости, что означает устойчивость среднего количества ошибок в эксперименте.

Основное допущение авторов состоит в том, что распределение вероятностей реакций субъектов подвергается линейному преобразованию в испытаниях.

На статистическом языке это означает линейность регрессии распределения вероятностей реакций.

Допущение линейности связано, прежде всего, с тем, что при этом модель достаточно хорошо аналитически описывается и исследуется. Вместе с тем, даже при этом допущении модель является достаточно содержательной и эффективной в анализе ряда экспериментов по выработке сложных рефлексов.

Разумеется, гораздо более широкие перспективы возникают при допущении нелинейности регрессии реакции субъекта. Однако при этом появляются существенные трудности в анализе таких моделей. По-видимому, вряд ли можно надеяться на эффективность непосредственного анализа. А тогда, как всегда в математике, успешный анализ сложных моделей возможен только асимптотическими методами.

Развитые Р.Бушем и Ф.Мостеллером модели процессов обучаемости основаны на марковском свойстве рассматриваемых процессов. В настоящее время для таких процессов (и значительно более общих) разработаны эффективные алгоритмы диффузионной аппроксимации (АДА), в которых сложная природа исходных процессов укрупняется (свертывается) к достаточно обозримым характеристикам диффузионного процесса, которых всего лишь три: центрирующая (или равновесная) составляющая, а также перенос (drift) и вариация (дисперсия). Если при этом мы сумеем извлечь адекватную интерпретацию этих характеристик в исходном процессе, тогда применение АДА становится вполне оправданным.

1. Описание стохастической модели поведения. Пусть задана совокупность N субъектов, способных осуществлять выбор из конечного числа r реакций (решений, ответов и т.п.). В качестве характеристики поведения заданы вероятности P_j , $1 \leq j \leq r$, выбора j -й альтернативы (ответа). При этом, разумеется, полная совокупность альтернатив означает, что $P_1 + P_2 + \dots + P_r = 1$, $0 \leq P_j \leq 1$.

Поведение совокупности субъектов состоит из отдельных этапов принятия решений, при этом на каждом этапе вероятности альтернатив меняются определенным образом. Более конкретно, процесс поведения обладает марковским свойством (стохастический детерминизм): изменение вероятности на каждом этапе происходит по фиксированному закону, не зависящему от предшествовавших событий в данном процессе.

Итак, процесс поведения состоит из последовательности событий (испытаний), в которых каждый субъект осуществляет выбор альтернатив в соответствии с заданным распределением вероятностей, после этого вероятности альтернатив меняются по фиксированному закону.

Примечание. Статистический смысл вероятностей альтернатив P_j , $1 \leq j \leq r$ состоит в том, что они задают среднюю частоту субъектов на каждом этапе процесса поведения субъектов (в среднем!) выбирают j -ю альтернативу в качестве реакции.

Для того, чтобы сконструировать количественный процесс поведения, введем случайные индикаторы реакций для каждого субъекта на i -м этапе

$$\delta_i^j(n), \quad 1 \leq i \leq N,$$

принимающие значение 1 с вероятностью $P_j(n)$ и 0 с вероятностью $1 - p_j(n)$:

$$\delta_i^j(n) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } P_j(n), \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - P_j(n). \end{cases} \quad (1)$$

Тогда процесс поведения задается суммами

$$v_n^j := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^j(n), \quad 1 \leq j \leq r. \quad (2)$$

Процесс поведения

$$v_n := (v_n^j; \quad 1 \leq j \leq r)$$

представляет собой r - мерный случайный процесс частот $0 \leq v_n^j \leq 1$.

Статистический смысл процесса поведения состоит в том, что j -я компонента v_n^j процесса определяет частоту (относительную) числа субъектов, принявших j -ю альтернативу на n -м этапе, так что Nv_n^j — есть число субъектов, принявших j -ю альтернативу на n -м этапе. При этом, очевидно, что средняя частота выбора j -й альтернативы субъектами равна $Ev_n^j = p_j(n)$.

Специалист по теории вероятностей понимает, что частоты v_n^j имеют биномиальное распределение вероятностей:

$$P\{v_n^j = k\} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p_j^k(n) (1 - p_j(n))^{N-k}. \quad (3)$$

Даже для вооруженного математическим образованием глаза очевидно, что точный анализ такого марковского процесса поведения с изменяющимися вероятностями $p_j(n)$ от этапа к этапу практически безнадежен. Так что на первый план выдвигается проблема асимптотического анализа процесса поведения при неограниченном возрастании параметров N и n к бесконечности.

Можно с уверенностью утверждать, что эффективный асимптотический анализ процесса поведения весьма нетривиален, о чем также свидетельствуют и многочисленные математические работы в этой области.

Разумеется, я не буду занимать ваше внимание обсуждением математических проблем возникающих в асимптотическом анализе процесса поведения. Постановка проблемы асимптотического анализа мне нужна лишь для того, чтобы вы прониклись уважением к выводам, которые из такого анализа следуют.

Итак, для завершения описания стохастической модели поведения остается лишь выбор функции регрессии, согласно которой изменяются вероятности альтернатив на каждом этапе.

Будем рассматривать функцию регрессии, предложенную в стохастической модели популяционной генетики Wright's & Fisher's (1922-Fisher; 1931, 1949-Wright):

$$p_j(n+1) = p_j(n) \cdot q_j(n), \quad (4)$$

$$q_j(n) := \sum_l w_{jl} p_l(n) / \sum_{k,l} w_{kl} p_l(n) p_k(n). \quad (5)$$

Существенное значение в этой модели занимает исходная интерпретация параметров w_{kl} , $1 \leq k, l \leq r$. По аналогии с интерпретацией этих параметров в популяционной генетике как коэффициентов выживаемости, можно полагать, что в стохастической модели поведения эти параметры w_{kl} характеризуют обучаемость (живучесть) выбора альтернатив.

2. Закономерности в процессе поведения. Функция регрессии (4)—(5) в стохастической модели Wright's & Fisher's считается наиболее естественной в популяционной генетике и подвергалась тщательному анализу в многочисленных работах, наиболее интенсивно, по-видимому, после 1949 г.

Однако подавляющее число исследователей использовали в асимптотическом анализе диффузионную аппроксимацию в непрерывном времени, что заставляло априори предполагать все коэффициенты живучести w_{kl} близкими к единице, что в определенной степени обедняет результаты анализа.

Вашему вниманию предлагается анализ процесса поведения с функцией регрессии (4)-(5) в дискретном времени без всяких ограничений на возможные значения коэффициентов обучаемости w_{kl} , за исключением, разумеется, естественных: $w_{kl} > 0$ и дополнительных условий симметричности: $w_{kl} = w_{lk}$.

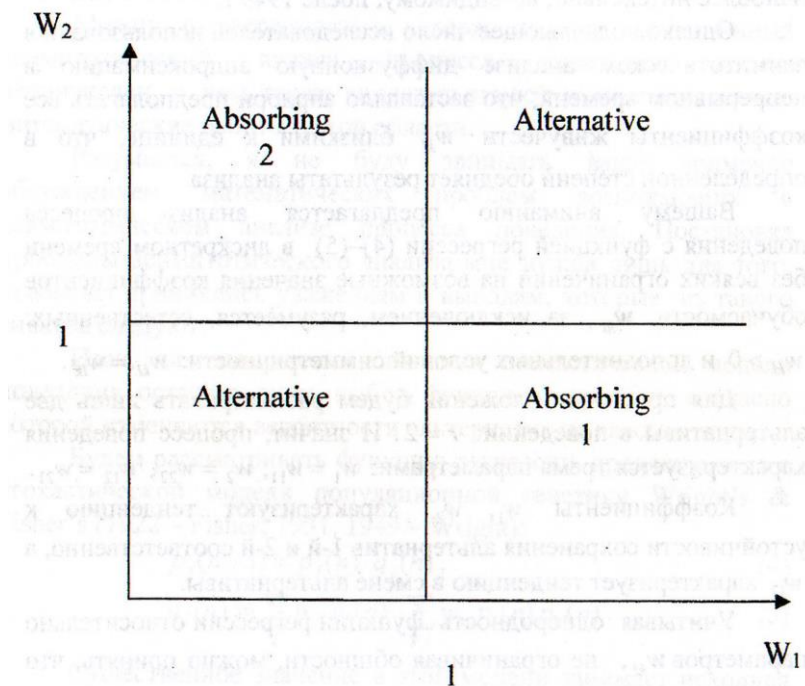
Для простоты изложения будем рассматривать лишь две альтернативы в поведении: $r = 2$. И значит, процесс поведения характеризуется тремя параметрами:

$$w_1 = w_{11}, w_2 = w_{22}, w_{12} = w_{21}.$$

Коэффициенты w_1 , w_2 характеризуют тенденцию к устойчивости сохранения альтернатив 1-й и 2-й соответственно, а w_{12} характеризует тенденцию в смене альтернативы.

Учитывая однородность функции регрессии относительно параметров w_{kl} , не ограничивая общности, можно принять, что $w_{12} = w_{21} = 1$. Так что процесс обучения полностью определяется двумя параметрами: w_1 и w_2 .

Возможные значения параметров w_1 и w_2 с учетом того, что $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ заполняют первый квадрант на плоскости



Прямыми $w_1 = 1$ и $w_2 = 1$ вся область значений разбивается на 4 части. Оказывается, что в каждой из этих областей процесс поведения ведет себя существенно по-разному. В данном случае процесс поведения задается двумя компонентами (частотами)

$$\nu_n^{(1)}, \nu_n^{(2)}, n \geq 0.$$

При этом очевидно, что

$$\nu_n^{(1)} + \nu_n^{(2)} = 1.$$

Закономерности процесса поведения при двух альтернативах с функцией регрессии Wright's & Fisher's следующие.

1. В области $w_1 < 1, w_2 < 1$: преимущественно выбор альтернативы меняется на следующем этапе — существует притягивающая точка равновесия

$$0 < \rho = \frac{1 - w_2}{2 - w_1 - w_2} < 1, \quad (6)$$

она такова, что

$$\nu_n^{(1)} \Rightarrow \rho \text{ и } \nu_n^{(2)} \Rightarrow 1 - \rho \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Этот закон означает, что в процессе поведения наблюдается устойчивая частота выбора альтернатив: $N\rho$ субъектов выбирают 1-ю альтернативу, $N(1-\rho)$ субъектов выбирают 2-ю альтернативу.

2. В области $w_1 > 1$, $w_2 > 1$: преимущественно сохраняется выбор альтернативы на каждом этапе обучения, существует отталкивающая точка равновесия:

$$0 < \rho = \frac{w_2 - 1}{w_1 + w_2 - 2} < 1, \quad (8)$$

она такова, что при $N, n \rightarrow \infty$

$$v_n^{(1)} \Rightarrow 0, \text{ если } v_0^{(1)} < \rho, \text{ и } v_n^{(2)} \Rightarrow 1, \text{ } v_0^{(2)} > \rho, \quad (9)$$

или же

$$v_n^{(1)} \Rightarrow 1, \text{ если } v_0^{(1)} > \rho, \text{ } v_n^{(2)} \Rightarrow 0, \text{ } v_0^{(2)} < \rho.$$

Этот закон, по моему мнению, заслуживает наибольшего внимания специалистов по обучению. Я позволю себе следующую интерпретацию этого закона в системе образования.

В каждом коллективе (классе) существует определенный средний уровень интеллекта ρ , $0 < \rho < 1$, при этом результат длительного процесса обучения существенно зависит от начальных условий. Если доля субъектов, принимающих правильное решение, превосходит ρ , то в итоге весь класс со временем становится таковым. Если же процент интеллектуальных субъектов (с интеллектом выше ρ) меньше ρ , то средний интеллект класса в процессе обучения снижается к нулю.

В этом законе проявляется эффект влияния интеллектуальности отдельных субъектов на коллективный интеллект.

3. В областях $w_1 > 1 \geq w_2$ или $w_2 > 1 \geq w_1$: преимущественно сохраняется выбор 1-й (или 2-й) альтернатив на каждом этапе — существует единственная поглощающая точка равновесия при

$$N, n \rightarrow \infty \quad v_n^{(1)} \Rightarrow 1, \quad v_n^{(2)} \Rightarrow 0$$

или

$$v_n^{(1)} \Rightarrow 0, \quad v_n^{(2)} \Rightarrow 1$$

при любых начальных условиях.

В этом случае побеждает одна из альтернатив, выбор которой преимущественно сохраняется на каждом этапе.

Этими тремя закономерностями не исчерпывается математический анализ. Можно далее продолжить асимптотический анализ флуктуаций процесса поведения относительно точки равновесия:

$$\zeta_n^{(k)} := v_n^{(k)} - \rho, \quad k = 1, 2.$$

Эта увлекательная проблема еще нами не завершена. Я надеюсь представить на ваше рассмотрение результаты анализа на следующей конференции.

Сформулированные мною закономерности процесса поведения требуют экспериментальной проверки. Эту также замечательную проблему я предлагаю для совместного исследования на вашем факультете менеджмента.

Замечание 1. Статистическая проблема анализа данных в процессе поведения состоит прежде всего в том, чтобы по данным результатам наблюдений процесса поведения оценить исходные параметры модели w_{kl} . Очевидно, что знание только точки равновесия ρ недостаточно для оценки двух параметров w_1 и w_2 . Дополнительная информация может быть получена из анализа флуктуаций поведения $\zeta_n = v_n - \rho$.

Замечание 2. В стохастической модели процесса поведения с числом альтернатив, большим 2, закономерности поведения естественно усложняются. Однако, в сущности, основные характерные особенности сохраняются: процесс поведения больших совокупностей субъектов после достаточно большого числа этапов характеризуется тремя типами равновесий: *притягивающими, отталкивающими и поглощающими*.

В процессах поведения со многими альтернативами равновесными (в пространстве параметров w_{kl} .) могут быть точки, линии, плоскости и т.д. вплоть до $(r-1)$ -мерных подпространств.

Притягивающие множества параметров характеризуют равновесные состояния процесса поведения.

Отталкивающие множества параметров разграничивают начальные данные.

Поглощающие множества параметров определяют предельные состояния процесса поведения.

Случайность и провидение

Прежде всего, я хочу заявить, что являюсь математиком, исповедывающим вероятностный, статистический подход в исследовании законов природы, в том числе и в поведении человека.

Я не верю в "судьбу", "рок", "фатализм". Я не верю астрологическим прогнозам и, уж тем более, предсказаниям ясновидящих, экстрасенсов и пр. шарлатанов.

Я убежден, что жизнь человека в обществе складывается благодаря двум существенным факторам:

1. воспитание и образование — внутреннее состояние;
2. случайные факторы, обусловленные статистической природой внешних событий — внешние обстоятельства.

Однако роль указанных факторов в формировании жизни может быть различной при одних и тех же обстоятельствах. Это значит, что человек, обладающий волей может существенно изменить свое поведение (а значит, и жизнь).

Случайные факторы, в которых человек способен значимо изменить свою жизнь, - я называю Провидением (Божьим!). Я уверен, что таких моментов Провидения у каждого человека на жизненном пути случается немного. Но принятые решения в такие моменты существенно сказываются в дальнейшем.

Замечу, что Стефан Цвейг называл Провидения — "звездными моментами". Я подчеркиваю: в моменты Провидения будущее может быть изменено, но не обязательно! Провидение это не рок, и не судьба. Провидение — это предложение жизни к диалогу, к изменению, к совершенствованию. Провидение споспешествует только тем, кто ищет, идет и надеется на Провидение. Чтобы успешно воспользоваться Провидением, надо быть готовым к Преодолению! Преодолению неизбежных испытаний, соблазнов, сомнений и страха.

1. Начало пути. Первым существенным Провидением в моей жизни было начало Великой Отечественной войны 22 июня 1941 года.

За неделю до войны я окончил среднюю школу № 118 на Подоле, в Киеве, с отличным аттестатом. Мне еще не исполнилось 18 лет и у меня не было паспорта. Отец за неделю до войны уехал на восток, под Брест, к умирающему отцу. Мы были вчетвером: я, сестра, мать и бабушка. Надо было решать свою судьбу. Решение было очевидным: либо попытаться попасть на фронт, либо поступать в Киевский университет на физико-математический факультет. Эта проблема неоднократно обсуждалась с отцом. На фронт нас с моим другом Петром Зильберманом, конечно, не взяли. А документы в КГУ после некоторых проволочек, приняли. Так что в 1941 я стал студентом КГУ. Забегая вперед, скажу, что окончил я университет в 1950 году, 9 лет спустя! В этот период входит работа на шахте в Донбассе, эвакуация в Среднюю Азию, учеба в Бухарском Педагогическом институте, служба в армии с июня 1942 по сентябрь 1947. И только три года, 1947 -1950, студенчества в Киеве, в университете.

Нетрудно понять, что в этот период моей жизни (1941-1950 гг.) произошли самые драматические события (в том числе и Провидения), определившие мою дальнейшую судьбу.

Разумеется, в последующие года (с 1950-го по 2007) также приходилось принимать решение в сложившейся ситуации Провидения.

3. Учиться! Представьте себе юношу из благополучной семьи: отец - ведущий агроном в Украине, мать (Рудзинская по отцу) - белошвейка. Мы живем на ул. Андреевский спуск №15 (знаменитый дом "Ричарда Львиное сердце") в квартире на 6-м этаже, с окном в потолок и балконом с видом на Подол и Заднепровье.

Моя позиция была естественной: учиться! А мне говорят: "Нет паспорта — нет права на учебу". Я прошел все кабинеты Министерства "освіти" и получил разрешение быть студентом! А еще через неделю военкомат призвал юношей, которых нельзя было сделать солдатами, и

отправил на трудовой фронт на Донбасс (подальше от фронта!). Так я стал бутчиком на шахте Ясинковская 31 бис. Однако руководство шахты решило избавиться от балласта, и все мы разбежались, кто куда.

Я поступил в Сталинский индустриальный институт на горный факультет (там была самая высокая стипендия). Успел проучиться не более недели, научился только расписываться, готовясь получить паспорт. Нас, студентов, тоже отправили на трудовой фронт: на военный завод готовить ящики для снарядов.

Руководство завода, получив указание к эвакуации тут же избавилось от балласта, т.е. неопытной молодежи. А дальше... А дальше была, естественно, эвакуация на восток.

4. Ташкент — город хлебный. Дорога в Ташкент достойна отдельного рассказа. Скажу только, что спасал эвакуационный документ, по которому мы могли получать продукты питания на эвакуопунктах.

В Ташкенте я разминулся с Киевским университетом. И нас, трех парней из одного двора, отправили в Бухарский педагогический институт. Поздно вечером мы нашли ректора (почему-то в буфете). Он принял наши документы и предложил купить хлеба в буфете. У нас, на троих было 20 копеек. Буфетчица бросила на весы почти целую буханку, и тут же сняла и отдала нам. Учеба в Бухарском пединституте на литературном факультете — гоже незабываемые впечатления.

5. Служба в армии. На следующий год, в июне 1942-го, нас призывают в армию. Для меня это было освобождение! Однако вечером начальник военкомата заявил, что я могу возвращаться обратно в Институт, так как мне еще нет 18 лет. Я тут же сформулировал: "Это ошибка в паспорте. Мои родители, отец и мать, подтвердят этот факт!" "Пиши заявление!" — заявил военком. Так я прослужил в рядах Советской Армии 5 лет, будучи уже 1924-го года рождения.

6. Харьковское училище. Все 5 лет я прослужил в Харьковском Военном Авиационном Училище связи (ХВАУС), сначала курсантом в Коканде, а затем младшим лейтенантом в Харькове. Беспечальное офицерское житье в училище достойно рассказа. Достаточно сказать, что мы переехали в Харьков осенью 1944 года, а я нашел Харьковский университет лишь весной 1945 года, после Дня Победы. И все-таки я поступил в Харьковский университет на физико-математический факультет и проучился заочно 2 года. Начальство училища, понимая бесперспективность моей дальнейшей службы в армии, сжалилось, и после моих многократных докладных с просьбой увольнения, в сентябре 1947 года я был отправлен в отставку.

7. КГУ. Естественно, я поехал в Киев, где жили мои родные: мать, сестра, бабушка, и поступил на 3-й курс механико-математического факультета. Незабываемые впечатления моего вхождения в коллектив студентов, в большинстве своем маменькиных сынков и дочерей. А я был

переросток - 22 года, да к тому же в солдатском одеянии и в кирзовых сапогах. А что у меня могло быть после армии? В семье никто не работал, сестра тоже училась в медицинском институте.

А отец! Об отце разговор особый. Оставим на политические комментарии.

8. Вторым существенным Провидением в моей жизни была встреча с Борисом Владимировичем Гнеденком, академиком, заведующим кафедрой теории вероятностей в КГУ и одновременно — зав. отделом в Институте математики. Конец 1949 года, мы, пятикурсники, выбираем темы дипломных работ. Наши учителя: С.Г.Крейн, М.А.Красносельский, С.И.Зуховицкий, Г.Кац и др. ориентировали нас на функциональный анализ, топологию, математическую физику. И вдруг, молодой энергичный академик Б.В. предлагает темы дипломных работ по монографии, написанной им с А.Н.Колмогоровым, которая существует только в гранках. Я без колебания выбрал тему, предложенную Б.В., рефлектируя на звучания слов: "Области притяжения устойчивых законов". Может быть что-то топологическое?

9. Дальнейшее кажется очевидным. Я стал доверенным лицом Б.В., более того, мне А.Н.Колмогоров поручил организационные дела по созданию журнала "Теория вероятностей и ее применения", я занял должность зав. отделом теории вероятностей после отъезда Б.В. в Москву в 1960 года и т.д. и т.п.

Однако все это не так просто, как говаривал В.Гафт в кинофильме "Понедельник начинается в субботу".

10. Направление на работу. В 1950 году я окончил университет с "красным" дипломом, и по положению должен был получить диплом на руки и иметь свободное распределение. А если учитывать, что Б.В. рекомендовал меня в аспирантуру, — проблем не должно было бы быть. Ан, нет! Мой отец в 1941 году попал в оккупацию и вернулся в Киев вместе с немецкой армией. Будучи агрономом, он легко нашел себе работу в подсобном хозяйстве под Киевом, и обеспечивал семью продовольствием.

После освобождения Киева в 1944 году от немецких оккупантов, началась сталинская чистка населения. Отца арестовали и осудили на 15 лет!

Спрашивается теперь: "какой ректор рискнет допустить в аспирантуру "меченного" выпускника?" Так и было. Я получил направление в Казахстан, преподавателем Акмолинского техникума. Кстати, там же, или почти там, находился и мой отец на урановых рудниках.

11. И снова меня выручает Провидение, созданное не без моего участия. На мое письмо Маленкову, с просьбой разрешить мне поступать в аспирантуру, ЦК партии Украины распорядилось: "разобраться!" Меня

вызывают на распределительную комиссию и предлагают Киевское облоно? Чем черт не шутит? А вдруг у него "рука в Москве"?! С этим направлением я иду в Министерство образования и прошу направить меня в ВУЗ Украины. Дважды министр А.Н.Русько обещал подписать направление, и дважды не выполнял обещания. Третий раз меня уже не пускают к нему в кабинет, и я жду в приемной, когда он выйдет на обед. Я загораживаю ему дорогу и говорю, говорю, говорю... "Приходи завтра" — сказал министр. На следующий день я получил направление старшим преподавателем Артемовского учительского института.

Через год, в 1951 году я поступил в аспирантуру Института математики к Борису Владимировичу Гнеденко.

А еще через год, в 1952 году меня исключают из комсомола! Но это уже другая история.

Как в сказках Шехерезады!

Продолжение следует!

12. Заключение. В моей жизни были и другие встречи с Провидением, но они касались более житейских проблем, хотя для меня весьма важных.

А если быть до конца откровенным, то надо добавить еще и необходимость *Божьего Благоволения* (Иван Бунин). Только с его помощью можно успешно воспользоваться Провидением. Уже кому достается Божье Благоволение - это только Богу известно⁵.

Моя жизнь удалась потому, что я успешно пользовался моментами Провидения, благодаря Божьему Благоволению.

11.11.2007

Список учеников

кандидатів та докторів наук,
підготовлених академіком НАН України В.С. Королюком

Кандидати наук

1964

1. Гусак Дмитро Васильович, К асимптотике распределения времени первого выхода однородного процесса с независимыми приращениями.

1965

2. Лігвінов Олександр Миколайович, Уточнение предельных теорем для случайных величин, связанных в цепь Маркова.

⁵ Должна же присутствовать мистика, в той или иной форме, в жизни человека!

3. Марченко Борис Григорович, Исследование прохождения случайных процессов через радиотехнические устройства (доктор технічних наук з 1980 року).

1966

4. Великий Анатолій Павлович, Асимптотические разложения решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при старших производных.

1967

5. Алексеев Анатолій Арсенович, Об аналитических методах исследования некоторых двумерных и многомерных задач теории массового обслуживания.

6. Томусяк Андрій Андрійович, Полумарковские процессы и их применение к анализу резервированных систем!

7. Мейтус В.Ю. Случайные аддитивные системы.

8. Деменін Олександр Миколайович, Некоторые вопросы абсолютной непрерывности вероятностных мер и их применения.

9. Сімонова Світлана Миколаївна, Полумарковские потоки и их приложение в теории массового обслуживания.

1968

10. Призва Гергій Йосипович, Некоторые вопросы теории и приложения марковских восстановительных процессов.

1969

11. Андреев Микола Варфоломійович, Некоторые задачи контроля, оптимальной остановки и управления марковскими случайными процессами.

12. Валах Валерій Якович, Исследование функционирования стохастических автоматов в случайных средах методом цепей Маркова и полумарковских процессов.

1971

13. Турбін Анатолій Федорович, Метод теории возмущенных на спектре линейных операторов в асимптотических задачах теории вероятностей.

1972

14. Козак Петро Прокопович, О связях континуальных винеровских интегралов и дифференциальных уравнений.

15. Родіонова Валерія Сергіївна, Применение спектральной теории теплицевых операторов в вопросах статистики случайных процессов.

1973

16. Закусило Олег Каленикович, Предельные теоремы для процессов с дискретным вмешательством случая.

17. Пономаренко Леонід Анатолійович, Разработка и исследование методов анализа и организации обслуживания в комплексах группового программного управления.

1976

18. Супрун Віктор Миколайович, Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака.

1977

19. Пенєв Іван Петров, Исследование цепи Маркова и скачкообразных марковских процессов, зависящих от малого параметра.

1978

20. Братійчук Микола Сергійович, Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями.

21. Плоткін Яков Давидович, Обращение линейных операторов, возмущенных на спектре, и приложения в теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

22. Єлейко Ярослав Іванович, Применение теорем типа восстановления к асимптотическому анализу полумарковских и ветвящихся процессов.

23. Лебедінцева Катерина Петрівна, Суммы случайного числа зависимых случайных величин в задачах резервирования и контроля.

24. Хусанов Махатмджан, Метод потенциала в теории массового обслуживания.

25. Пірджанов Байрам, Граничные функционалы от решетчатых случайных блужданий (метод потенциала).

26. Таджієв Ата, Асимптотическое разложение решения уравнения марковского восстановления.

1979

27. Печарський Константин Константинович, Корреляционная функция статистического функционала системы взаимодействующих частиц.

1980

28. Скороход Тетяна Анатоліївна, Бесконечные произведения случайных независимых линейных операторов.

29. Резніков Сергій Іванович, Предельные теоремы типа фазового укрупнения для случайных процессов.

1981

30. Чорна Майя Пилипівна, Исследование некоторых процессов Маркова с линейчатой компонентой, описывающих некоторые модели массового обслуживания.

1983

31. Єлейко Олег Іванович, О граничных функционалах для осциллирующих сложных пуассоновских процессов.

1984

32. Лисянський Олександр Вікторович

33. Коновалюк Валентина Станіславівна, Суперпозиция процессов марковского восстановления с зависимостью.

1985

34. Свіщук Анатолій Віталійович, Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения.

1986

35. Пірлієв Бабадурди, Регенерирующие полумарковские случайные блуждания на полуоси.

36. Чабанюк Ярослав Михайлович, Винеровский интеграл на бесконечных произведениях пространств непрерывных функций и некоторые его применения.

37. Кравець Тетяна Вікторівна

1987

38. Литвин Наталія Василівна, Процессы марковского восстановления в многокомпонентных системах обслуживания.

39. Непесова Джемал Кличівна, Случайное блуждание с отражающим экраном на суперпозиции двух процессов восстановления.

1991

40. Драбкін Лев Маркович, Граничные задачи на полуоси для регенерирующих случайных блужданий.

41. Музрапов Сунат Аминович, Регенерирующие полунепрерывные случайные блуждания с отражением.

2007

42. Мамонова Ганна Валеріївна. Багатоканальні системи обслуговування в схемі усередненої та дифузійної апроксимації.

Доктори наук

1980

1. Гусак Дмитро Васильович, Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов.

2. Турбін Анатолій Федорович, Исследования по теории сингулярно возмущенных полугрупп операторов и асимптотическому фазовому укрупнению случайных процессов.

1988

3. Закусило Олег Каленикович, Марковские процессы с простыми и сложными функциями сноса.

1990

4. Братійчук Микола Сергійович, Исследования в теории граничных задач для марковских случайных блужданий.

1992

5. Свіщук Анатолій Віталійович, Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций и их применение.

6. Великий Анатолій Павлович, Моделі та обчислювальні алгоритми в задачах народногосподарського прогнозування (на прикладі задачі інформатизації Мінекономіки України).

7. Андрєєв Микола Варфоломійович, Методы редукции в задачах управления, остановки и контроля вероятностных моделей.

1995

8. Єлейко Ярослав Іванович, Асимптотичний аналіз і перехідні явища в матричнозначних випадкових еволюціях, гіллястих процесах та процесах з марківським втручанням випадку.

1996

9. Пономаренко Леонід Анатолійович, Системи обслуговування із ситуаційними пріоритетами. Аналіз та оптимізація.

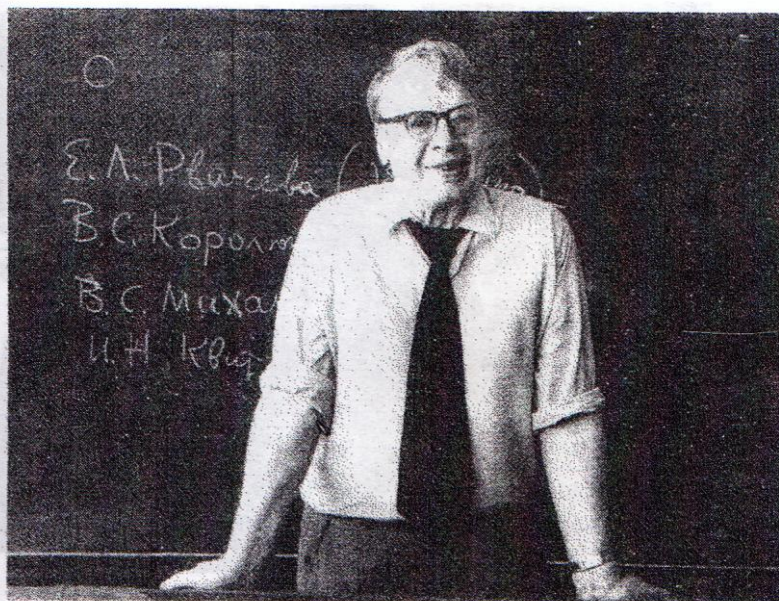
2006

10. Гасаненко Віталій Олексійович, Дослідження випадкових процесів у трубчастих областях.

2008

11. Чабанюк Ярослав Михайлович, Стохастична апроксимація в еволюційних системах з марковськими та напівмарковськими переключеннями.

ФОТОГРАФИИ



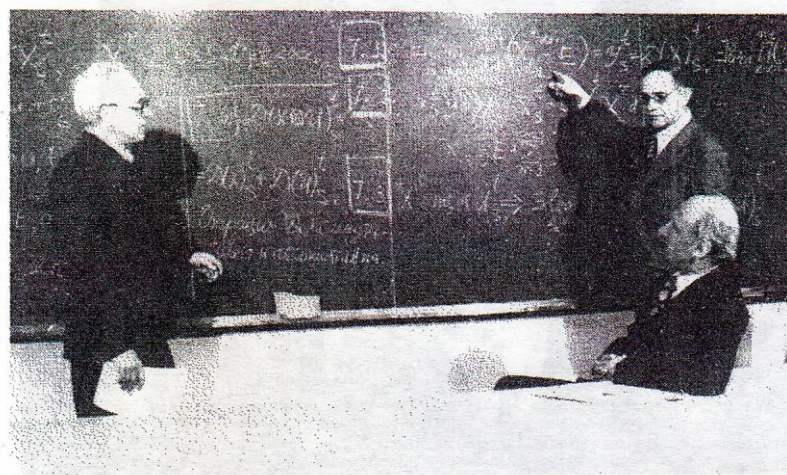
Борис Владимирович Гнеденко



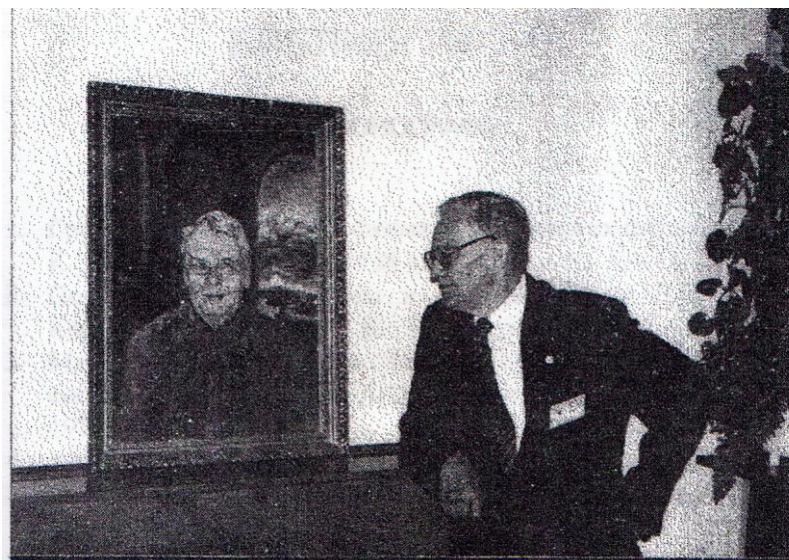
**III Всесоюзная конференция по
теории вероятностей и математической
статистике 1953 год
(почти все вероятностники СССР)**



Два Толи и два Володи



III Всесоюзная конференция по
теории чисел
Встреча у доски



В гостях у учителя

БИБЛИОГРАФИЯ

І. МОНОГРАФІЇ

1. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. — К.: Наук, думка, 1975. — 138 с.
2. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин — К.: Наук, думка, 1976. — 184 с.
3. Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин — К.: Наук, думка, 1978. — 220 с.
4. Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — К.: Наук, думка, 1981. — 240 с.
5. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин — К.: Наук, думка, 1982, — 236 с.
6. Асимптотический анализ распределений статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — К.: Наук, думка, 1984. — 304 с.
7. Граничные задачи для случайных блужданий / В.С. Королюк, Н.С. Братийчук, Б. Пирджанов — Ашхабад : Ылым, 1987. — 256 с.
8. Мартингальная аппроксимация / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — К.: Наукова думка, 1988. — 247 с.
9. Стохастические модели систем — К.: Наук, думка, 1989. — 208 с.
10. Теория U-статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — К.: Наук, думка, 1989. — 381 с.
11. Полумарковские случайные эволюции / В.С. Короток, А.В. Свищук — К.: Наук, думка, 1992. — 254 с.
12. Mathematical foundations of the state lumping of large systems / V.S. Korolyuk, A.F. Turbin — Kluwer Acad. Publ., 1993. 278 p.
13. Стохастичні моделі систем — К.: Либідь, 1993. — 137 с.
14. Случайные перманенты / В.С. Короток, Ю.В. Боровских — К. Ин-т матем. АН Украины, 1993. — 136 с.
15. Theoty of U-statistics / V.S. Korolyuk, Yu.V. Borovskich — Kluwer Acad. Publ, 1994. — 552 p.
16. Random Permanents / Yu.V. Borovskich, V.S. Korolyuk — Kluwer Acad. Publ, 1994. — 194 p.
17. Semi-Markov random evolutions / V.S. Korolyuk, A.V. Swishchuk — Kluwer Acad. Publ, 1995. — 310 p.
18. Evolution of systems in random media / V.S. Korolyuk, A.V. Swishchuk — CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. — 352 p.
19. Martingale approximation / Yu.V. Borovskikh, V.S. Korolyuk — Utrecht: VSP, 1997. — 322 p.
20. Stochastic models of systems / V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk — Kluwer Acad. Publ, 1999. — 185 p.

21. Эволюционные стохастические системы. Алгоритмы усреднения и диффузионной аппроксимации / В.С. Королюк, А.В. Свищук — Праці ІМ НАН України. Математика та її застосування. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2000. — 344 с.

22. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V.S. Korolyuk, N. Limnios — World Scientific Publishers, 2005. — 330p.

II. ПІДРУЧНИКИ

1. Элементы программирования: Учеб. пособ. для вузов / Б.В. Гнеденко, В.С. Королюк, Е.Л. Ющенко — М.: Физматгиз, 1961, — 348 с.

2. Элементы программирования: Учеб. пособ. для вузов, 2-е изд., стер. / Б.В. Гнеденко, В.С. Королюк, Е.Л. Ющенко - М.: Физматгиз, 1963. — 348 с.

3. Алгоритми і математичні машини: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. фак. пед. ін-тів УРСР / Л.А. Калужнін, В.С. Королюк — К.: Рад. шк., 1964, —283 с.

4. Bevezetes a programozasba / B.V. Gnyedyenko, V.Sz. Koroljuk, E.L. Juscsenko — Budapest: Muszaki Konwkido, 1964. —

1 kot. 228 l.

2 kot. 204 l.

5. Elemente der Programmierung / B.W. Gnedenko, W.S. Koroljuk, J.L. Justschenko — Leipzig, B.G. Teubner, Verlagsgesellschaft, 1964,— 327 S.

6. Математичні машини і програмування: Метод, вказівки до вивчення курсу для студентів-заочників фіз.-мат. фак. пед. ін- тів. — К.: Рад. шк., 1966. — 70 с.

7. Элементы теории информации: Метод, розробки. — К.: Київ, держ. ун-т, 1968. — 12 с.

8. Elements de programmation sur ordinateurs / B.V. Gnedenko, V.S. Koroliouk, E.L. Iouchtchenko — Paris: Dunod, 1969. — 362 p.

9. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин; Под ред. В.С. Королюка — К.: Наук, думка, 1978,—582 с.

10. Фазовое укрупнение сложных систем: Метод, пособие / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин — К.: Вища шк., 1978. — 112 с.

11. Manual de la teoria de probabilidades y estadistica matemática / V.S. Koroliuk, A.V. Skorojod, N.I. Portenko, A.F. Turbin; Red. V.S. Koroliuk — Moscú: Mir, 1981. — 580 p.

12. Aide-mémoire de théorie des probabilités et de statistique mathématique / V. Koroliouk, N. Portenko, A. Skorokhod, A. Tourbine; Sous la direction de V. Koroliouk — Moscou: Mir, 1983. — 582 p. То же. — Рус.: № 146.

13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2-е изд., стер. / В.С. Королук, Н.И. Портенко, А.В. Скороход А.Ф. Турбин — М.: Наука, 1985. — 640 с.

14. Теорія ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики / В.С. Королук, В.К. Ясинський — Золоті литаври, Чернівці, 2005.

15. Ймовірність, статистика та випадкові процеси, комп'ютерна практика / В.С. Королук, В.К. Ясинський, Е.Ф. Царьков — Чернівці, 2007, Т. 1. — 429 с.

16. Random Evolution toward applications. Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Wiley, 2007.

17. Ймовірність, статистика та випадкові процеси, комп'ютерна практика / В.С. Королук, В.К. Ясинський, Е.Ф. Царьков — Чернівці, 2008, Т. 2. — 563 с.

III. СТАТТІ

1. Декілька зауважень до теорії областей притягання стійких розподілів / Б.В. Гнеденко, В.С. Королук. — Доп. АН УРСР, 1950, №4, с. 275-278.

2. Вивчення максимального розходження двох емпіричних розподілів / В.С. Королук, Б.І. Ярошевський. — Доп. АН УРСР, 1951, №4, с. 243 - 247.

3. О максимальном расхождении двух эмпирических распределений / Б.В. Гнеденко, В.С. Королук. — Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 4, с. 525 - 528.

4. Про одну задачу Б.В. Гнеденка. — Доп. АН УРСР, 1951, № 1, с. 21 - 24.

5. О критериях согласия А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова : Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. — К., 1954. — 7 с.

6. Асимптотические разложения для критериев согласия А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова. — Докл. АН СССР, 1954, т. 95. № 3, с. 443-446.

7. Асимптотические разложения для критериев согласия А.Н. Колмогорова и Н.В. Смирнова. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 2, с. 103-124.

8. О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок. — Там же, № 1, с. 81 - 96.

9. Об одном способе повышения асимптотической точности метода сеток. — Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 6, с. 985 - 987.

10. Об одном способе повышения асимптотической точности метода сеток. — Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 4, с. 379 - 387.

11. Определение линии уровня функции двух переменных на быстродействующих счетных машинах / В.С. Королук, Е.Л. Ющенко. —

В кн.: Вопросы техники быстродействующих счетных машин / Сб. тр. лаб. № 1. К.: Изд-во АН УССР, 1955, вып. 2, с. 135- 142:

12. Асимптотические разложения для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли — Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 2, с. 183 - 186.

13. Асимптотические разложения некоторых функционалов от сумм случайных величин, — В кн.: Тр. III Всесоюз. мат. съезда, Москва, июнь-июль 1956 г. Т. 2. Краткое содержание обзорных и секционных докладов. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 47.

14. Определение линии уровня функции двух переменных на быстродействующих электронных счетных машинах / В.С. Королук, Е.Л. Ющенко. — Там же, т. 1. Секционные доклады, с. 192.

15. Про один спосіб програмування. — Доп. АН УРСР, 1958, № 12, с. 1292- 1295.

16. Программирование таблиц для оптимальных методов статистического приемочного контроля / В.С. Королук, Л.П. Нижник, Е.Л. Ющенко. — В кн. : Вопросы вычислительной математики и техники / Сб. тр. ВЦ. К.: Изд- во АН УССР, 1958, вып. 3 с. 9 -17.

17. Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли. — Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 4, с. 369 - 397.

18. Асимптотичний аналіз імовірності збирання в одомірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу. — Доп. АН УРСР, 1959, № 7, с. 702 - 707.

19. Об адресном программировании / В.С. Королук, Е.Л. Ющенко — В кн.: Методы программирования и решения задач на цифровых вычислительных машинах, К., 1959, вып. 36, с. 298 - 304.

20. Про один клас адресних алгоритмів / В.С. Королук, О.А. Летичевський. — Доп. АН УРСР, 1959, № 2, с. 116 - 119.

21. О понятии адресного алгоритма. — Проблемы кибернетики, 1960, вып. 4, с. 95-110.

22. Об адресном программировании / В.С. Королук, Е.Л. Ющенко.— В кн.: Материалы научн.-техн. конф. "Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники" [Киев, 1-3 дек. 1958 г.]. К., 1960, с. 181 - 188.

23. Об асимптотике некоторых функционалов в двумерной схеме блуждания. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 3, с. 520 - 523.

24. Об асимптотике распределений в схеме блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода: [Рез. докл. на совещ. по предельным теоремам теории вероятностей. Ужгород, 28 сент.-2 окт. 1959 г.]. — Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 2, с. 255 - 256.

25. Об асимптотике решений разностных уравнений с малым параметром. — Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 3, с. 342 - 346.

26. Об одном новом методе в задачах блуждания на полуоси [Рез. докл. на совещ. по предельным теоремам теории вероятностей. Ужгород, 28 сент. — 2 окт. 1959 г.] / В.М. Золотарев, В.С. Королук — Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 2, с. 263 - 264.

27. Групові операції машини "Київ" / В.С. Королук, К.О. Шкабара, К.Л. Ющенко. — В кн.: Збірник праць з обчислювальної математики і техніки. К.: Вид-во АН УРСР, 1961, т. 2, с. 16-20.

28. Замечание об алгоритме построения погранслоя / В.С. Королук, Э.Р. Ницкая. — Успехи мат. наук, 1961, т. 16, № 5, с. 171 - 176.

29. О методе построения асимптотических разложений: [Рез. докл., сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Моск. ун-та. Заседание 19 окт. 1960 г.]. — Теория вероятностей и ее применения, 1961, т. 6, вып. 3, с. 359 - 362.

30. Об асимптотике некоторых функционалов в решетчатой схеме блуждания. — Там же, с. 334 - 341.

31. Об одной гипотезе Б.В. Гнеденко / В.М. Золотарев, В.С. Королук. — Там же, вып. 4, с. 469 - 474.

32. Поправка к работе. — 1962, т. 7, вып. 1, с. 120.

33. Питання теорії і практики програмування / В.С. Королук, К.Л. Ющенко. — В кн.: Збірник праць з обчислювальної математики і техніки. К.: Вид-во АН УРСР, 1961, т. 1, с. 5 - 30.

34. Asymptotic expansions in probability theory / B.V. Gnedenko, V.S. Koroljuk, A.V. Skorohod. — In: Proc. IVth Berkeley Sympos, on Math, statistics and probability, 1960, Vol. 2. Berkeley — Los Angeles: Univ. California press, 1961, p. 153 - 170.

35. On the maximum discrepancy between two empirical distributions / B.V. Gnedenko, V.S. Koroljuk. — In: Sel. transl. in math., statistics and probability. Vol. 1. Providence : AMS, 1961, p. 32 -36.

36. Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в решетчатой схеме блуждания. — Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, вып. 4, с. 393 - 409.

37. К асимптотике распределений максимальных уклонений. — Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 3, с. 522 - 525.

38. К асимптотике распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе / В.С. Королук, Д.В. Гусак. — Укр. мат. журн, 1962, т. 14, № 2, с. 138 - 144.

39. О методе построения асимптотических разложений. — В кн.: Тр. VI Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике и коллоквиума по распределениям в бесконечномерных пространствах, Вильнюс, 5-10 сент. 1960 г.; Паланга, 12-14 сент. 1960. Вильнюс: Гос. изд-во полит., и науч. лит. ЛитССР, 1962, с. 51 - 56.

40. Про одну задачу для інтегрального рівняння на півосі. — Доп. АН УРСР, 1962, № 9, с. 1127 - 1130.

41. Асимптотический анализ в граничных задачах случайных блужданий. — Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — К., 1963. — 19 с.

42. Асимптотика некоторых функционалов в граничных задачах двумерного случайного блуждания. — В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 43-48.

43. Асимптотика некоторых функционалов в граничных задачах двумерных случайных блужданий: [Рез. докл. на Всесоюз. коллоквиуме по предельным теоремам теории вероятностей. Фергана, 17-22 сент. 1962 г.]. — Теория вероятностей и ее применения. 1963, т. 8, вып. 1, с. 116.

44. Некоторые результаты по асимптотическим разложениям в предельных теоремах. — В кн.: Тр. IV Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 3—13 июля 1961 г. Т. 2. Л.: Наука, 1964, с. 382.

45. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, №3, с. 123-128.

46. О результатах асимптотического анализа в задачах с границами: [Докл. прочитан на VII Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике в окт. 1963 г. в г. Тбилиси] / А.А. Боровков, В.С. Королук. — Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, с. 225 - 266.

47. Об одном методе синтеза оптимальных систем автоматического контроля / В.И. Иваненко, В.С. Королук. — Кибернетика, 1965, № 2, с. 98-101.

48. Об одном условии устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при старших производных / А.П. Великий, В.С. Королук. — В кн.: Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям диф. уравн. с отклоняющимся аргументом: Тез. докл. Черновцы, 1965, с. 10-11.

49. Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов / В.С. Королук, А.А. Томусяк. — Кибернетика, 1965, № 5, с. 55 - 59.

50. The asymptotic behavior of distributions of maximal deviations in a Poisson process / V.S. Koroljuk, D.V. Gusak. — In: Sel. transi, in math, statistics and probability. Vol. 5. — Providence : AMS, 1965, p. 270-277.

51. Анализ болометра как элемента электрической цепи / В.С. Королук, А.И. Слободянюк. — Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1967, т. 10, № 1, с. 82 - 85.

52. Математическая модель спонтанной активности некоторых нейронов центральной нервной системы / П.Г. Костюк, В.С. Королук, Б.Я. Пятигорский, Э.П. Ткаченко. — В кн.: Тез. докл. и сообщ. на Всесоюз. межвуз. симпоз. по прикл. математике и кибернетике. [Горький, 29 мая - 3 июня 1967 г.]. Горький, 1967, с. 191 - 192.

53. Математическая модель спонтанной активности некоторых нейронов центральной нервной системы / В.С. Королук, П.Г. Костюк, Б.Я. Пятигорский, Э.П. Ткаченко. — Биофизика, 1967, т. 12, вып. 5, с. 895-899.

54. Полумарковские процессы и их приложения / И.И. Ежов, В.С. Королук — Кибернетика, 1967, № 5, с. 58 - 65.

55. Исследование распределений функционалов от случайных процессов, имеющих приложение в статистической теории связи и теории надежности. — В кн.: Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в институтах АН УССР. Математика и кибернетика. Вып. 1. К.: УкрНИИТИ, 1968, с. 4.

56. О моменте первого прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями / Д.В. Гусак, В.С. Королук, — Теория вероятностей и ее применения, 1967, т. 13, вып. 3, с. 471 - 478.

57. Стохастические автоматы со случайным временем реакции и их функционирование в случайных средах / В.Я. Валах, В.С. Королук. — В кн.: IV Всесоюз. совещ. по автоматическому управлению (техн. кибернетика). Тбилиси, 1968: Тез. докл. Кн. 1, Москва, 1968, с. 102- 103.

58. О некоторой схеме контроля за пуассоновским процессом со сносом / Н.В. Андреев, В.С. Королук. — Кибернетика, 1969, № 1, с. 72-74.

59. О совместном распределении процесса со стационарными приращениями и его максимума / Д.В. Гусак, В.С. Королук. — Теория вероятностей и ее применения, 1969, т. 14, вып. 3, с. 421 -430.

60. О функционировании стохастических автоматов в составной случайной среде / В.Я. Валах, В.С. Королук. — В кн.: Тез. докл. Все-союз, симпоз по вероятностным автоматам, Казань, 1969. Казань : Изд-во Казан, ун-та, 1969, с. 19 - 20.

61. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний. — Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 6, с. 842 - 845.

62. Об одной предельной теореме для полумарковских процессов / В.С. Королук, Л.И. Полищук, А.А. Томусяк. — Кибернетика, 1969, № 4, с. 144 - 145.

63. Полумарковские процессы в задачах теории надежности. — В кн.: Математические методы контроля качества и надежности / Тр. Всесоюз. коллоквиума. [Ташкент, сент. 1967 г.]. Ташкент: ФАН УзССР, 1969, с. 51 - 57.

64. Про розподіл максимуму процесів з незалежними приростами, керованими ланцюгом Маркова / І.І. Єжов, В.С. Королук, Е.С. Штатланд. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 2, с. 115- 118,

65. Про час перебування пуассонового процесу в смузі з затримуючим екраном / В.С. Королук, Е.П. Ткаченко. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 6, с. 513 - 516.

66. Асимптотичний розклад твірної функції часу перебування пуассонового процесу в смузі з затримуючим екраном / В.С. Корольук, Е.П. Ткаченко. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 4, с 315-317.

67. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний / В.С. Корольук, А.Ф. Турбин — Теория вероятностей и мат. статистика, 1970, вып. 2, с. 133 - 143.

68. Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями / Д.В. Гусак, В.С. Корольук. — Теория вероятностей и мат. статистика, 1970, вып. 1, с.55-73.

69. Asymptotic behaviour of semi-Markov processes with the split set Mathématiciens, Nice, 1970: Les communications individuelles. S. 1. states / V.S. Koroljuk, D.V. Gusak. — In: Congrès Intern, des 1970, p. 146.

70. Асимптотические разложения для производящей функции времени пребывания обобщенного пуассоновского процесса в полосе с задерживающим экраном / В.С. Корольук, Э.П. Ткаченко. — Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, вып. 5, с. 62 - 70.

71. Асимптотическое поведение полумарковских процессов с расщепляемым множеством состояний / Д.В. Гусак, В.С. Корольук. — Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, вып. 5, с. 43 - 50.

72. О некоторых стационарных характеристиках полумарковских процессов / В.С. Корольук, А.А. Томусяк. — Кибернетика, 1971, №5, с. 65-68.

73. Об асимптотическом поведении распределения времени поглощения цепи Маркова / В.С. Корольук, И.П. Пенев, А.Ф. Турбин. — Кибернетика, 1972, № 2, с. 20 - 22.

74. Об асимптотическом поведении распределения времени поглощения цепи Маркова / В.С. Корольук, И.П. Пенев, А.Ф. Турбин. — В кн.: Резюме на докл. III конгрес на Българските математици, Варна, 1- 5 сент. 1972. Ч. I. Варна, 1972, с. 90.

75. Об одном методе доказательства предельных теорем для некоторых функционалов от полумарковских процессов / В.С. Корольук, А.Ф. Турбин. — Укр. мат. журн., 1972, т. 24, № 2, с. 234 - 239.

76. Стохастические автоматы со случайным временем реакции и их функционирование в случайных средах / В.Я. Валах, В.С. Корольук. — В кн.: Автоматы, гибридные и управляющие машины / Тр. IV Всесоюз. совещ. по автомат. управлению, Тбилиси, 30 сент. - 5 окт. 1968 г. М.: Наука, 1972, с. 38 - 45.

77. Distribution of maximum of processes with independent increments controlled by a Markov chain / I.I. Ezov, V.S. Koroljuk, E.S. Statland, — In: Sel, transl. in math, statistics and probability. Vol. 10. Providence : AMS, 1972, p. 49 - 53.

78. Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения цепи Маркова / В.С. Королук, И.П. Пенев, А.Ф. Турбин. — Кибернетика, 1973, № 4. с. 133 - 135.

79. Граничные задачи для дискретного случайного блуждания непрерывного снизу / С.В. Дьячковский, В.С. Королук. — В кн.: Междунар. конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 25-30 июня 1973 г.: Тез. докл. Т. I. Вильнюс, 1973, с. 217 - 218.

80. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов со сносом / В.С. Королук, Д.В. Гусак. — Там же, с. 329 - 330.

81. Метод возмущенных на спектре линейных операторов в асимптотических задачах теории вероятностей / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — Там же, с. 331 - 334.

82. Про час перебування узагальненого пуассонівського процесу в смузї із затримуючим екраном. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 3, с. 200-202.

83. Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса. — Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, вып. 1, с. 3-14.

84. Об одном подходе к асимптотическому решению задач оптимального управления / А.П. Великий, В.С. Королук. — В кн.: Всесоюз. конф. по оптимальному управлению в механических системах, Москва, 2-4 дек. 1974 г. : Тез. докл. М.: 1974, с. 21.

85. The method of perturbation on the spectrum of linear operators in asymptotic problems of probability theory / V.S. Koroljuk, A.F. Turbin. — In: Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai. Keszthely, 1974, p. 167- 182.

86. Асимптотическое укрупнение полумарковских процессов с произвольным фазовым пространством / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — В кн.: Тез. докл. III Сов.-яп. симпоз. по теории вероятностей. Ташкент, 26 авг. - 3 сент. 1975 г. Т. 1. Ташкент: Изд-во ФАН УзССР, 1975, с. 72 - 75.

87. Збурення операторів на спектрі та асимптотичне укрупнення ланцюгів Маркова / В.С. Королук, А.Ф. Турбін. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 5, с. 402 - 405.

88. О задачах разорения для сложного пуассоновского процесса. — Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, вып. 2, с. 382-384.

89. Об асимптотическом решении одной задачи оптимального управления / А.П. Великий, В.С. Королук. — Укр. мат. журн., 1975, т. 27, № 3, с. 364 - 368.

90. Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака / В.С. Королук, В.Н. Супрун, В.М. Шуренков. — Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, вып. 2, с. 253 - 259.

91. Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова / В.С. Королук, В.М. Шуренков. — Докл АН СССР, 1976, т. 231, № 5, с. 1056 -1058.

92. Метод потенциала в задачах теории массового обслуживания / В.С. Корольук, А.Ф. Турбин. — В кн.: Теория массового обслуживания: Тр. III Всесоюз. шк.-совещ. по теории массового обслуживания, Пущино-на-Оке. Т. 1. М.: Изд-во Моек ун-та 1976 с. 119 - 127.

93. Об одном представлении резольвенты сложного пуассоновского процесса на полуоси / Н.С. Братийчук, В.С. Корольук. — В кн.: Исследования по теории случайных процессов. К.: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 31 - 38.

94. Asymptotic enlarging of semi-Markov processes with an arbitrary state space / V.S. Korolyuk, A.F. Turbin. — In: Proc. of the III Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin: Springer, 1976, p. 297 - 315 (Lecture notes in Mathematics, N 550).

95. Асимптотический подход к переносу граничных условий для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.П. Великий, В.С. Корольук. — Укр. мат. журн., 1977, т. 29, № 1, с. 23 -31.

96. Асимптотичне розвинення для розподілу часу поглинання напівмарковського процесу / В.С. Корольук, А. Таджієв. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 12, с. 1065 - 1068.

97. Метод обращения возмущенных на спектре линейных операторов и некоторые его применения / В.С. Корольук, А.Ф. Турбин. — В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. К.: Наук, думка, 1977, с. 107 - 114.

98. Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова / В.С. Корольук, В.М. Шуренков. — Укр. мат. журн., 1977, т. 29, № 4, с. 464 - 471.

99. Полумарковские модели сложных стохастических систем. — В кн.: Вторая Междунар. лятна школа по теория на вероятностите и математическа статистика, Варна, 1-12 юни 1976 г. София, 1977, с. 115 - 185.

100. Предельные теоремы для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с ограничением / И.И. Ежов, В.С. Корольук. — В кн.: Вторая Вильнюс, конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 23 июня -3 июля 1977 г.: Тез, докл. Т. 1. Вильнюс, 1977, с. 142 - 143.

101. Укрупнение сложных систем (методологические аспекты). — Кибернетика, 1977, № 1, с. 129 - 132.

102. Предельная теорема для времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний / В.С. Корольук, Е.П. Лебединцева. — Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 5, с. 671 - 674.

103. Предельные теоремы для одного класса условных марковских процессов / И.И. Ежов, В.С. Корольук. — К., 1978, — 48 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.3).

104. Характеристические функционалы случайных волновых полей в неоднородных средах / А.Н. Деменин, В.С. Королук. В кн.: Физико-технические приложения краевых задач. К.: Наук, думка. 1978, с. 5 - 23.

105. Алгоритм укрупнения цепей Маркова с помощью разрежения / В.С. Королук, А.А. Томусяк, А.Ф. Турбин. — В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. К.: Наук, думка, 1979, с. 62 - 69.

106. Асимптотические разложения для критерия Вилкоксона / В.С. Королук, Ю.В. Боровских. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 10, с. 797-801.

107. Время пребывания полумарковского процесса в расщепляющемся множестве состояний / В.С. Королук, А.Ф. Турбин, А.А. Томусяк. — В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. К.: Наук, думка, 1979, с. 69 - 79.

108. Теорема Берри—Эссеена для выборок из конечного множества независимых случайных величин / В.С. Королук, Ю.В. Боровских. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 11, с. 902 - 904.

109. Аддитивные задачи аналитической теории чисел и асимптотика распределений ранговых статистик / Ю.В. Боровских, В.С. Королук. — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 525 -529.

110. Стационарное фазовое укрупнение марковских процессов восстановления / Е. Ариас, В.С. Королук. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 8, с. 3 - 6.

111. Аппроксимация распределения рангового коэффициента корреляции Спирмена / В.С. Королук, Ю.В. Боровских. — Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 25, с. 47-55.

112. Асимптотическая аппроксимация распределения статистики Вилкоксона / В.С. Королук, Ю.В. Боровских. — Изв. АН УзССР, 1981, № 2, с. 26-31.

113. Асимптотический анализ решений сингулярно возмущенных эволюционных уравнений / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, Киев, 30 авг. – 6 сент. 1981 г.: Тез. докл. К., 1981, с. 167 - 168.

114. Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения слабо неоднородной цепи Маркова / В.С. Королук, И.П. Пенев, А.Ф. Турбин. — В кн.: Аналитические методы исследований в теории вероятностей. К.: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 97 - 105.

115. О среднеквадратических критериях симметрии / В.С. Королук, Ю.В. Боровских. — Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 24, с. 75 - 77.

116. Предельные теоремы типа фазового укрупнения для случайных процессов / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — В кн.: Третья Вильнюс, конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 22—27 июня 1981 г.: Тез. докл. Т. 1. Вильнюс, с. 243 - 244.

117. Процессы марковского восстановления в задачах анализа систем. — В кн.: Теория массового обслуживания: Тр. Всесоюз. шк.-семинара, Баку, 1978. М. : ВНИИС, 1981, с. 101 - 102.

118. Суперпозиция процессов марковского восстановления. — Кибернетика, 1971, № 4, с. 121 - 124.

119. Limit theorems for a class of conditional Markov processes / I.I. Ezov, V.S. Koroljuk. — In: Sel. transi, in math, statistics and probability. Vol. 15.— Providence: AMS, 1981, p. 181 - 211.

120. Аналитические и асимптотические методы математической теории надежности восстанавливаемых систем. — В кн.: I Респ. конф. по повышению надежности и долговечности машин и сооружений. [Киев, 12-14 окт.1982 г.]: Тез. докл. Ч. 1. К.: Наук, думка, 1982, с. 9 - 10.

121. Фазовое укрупнение состояний в анализе надежности систем. — Надежность и долговечность машин и сооружений, 1982, вып. 1, с. 7-10.

122. Limit theorems for Markov random evolutions / V.S. Koroljuk, A.F. Turbin, A.V. Swischuk. — In.: IV USSR-Japan symp. on probability theory and math, statistics, Tbilisi, Aug. 23—29, 1982: Abstr. of communications. Vol. 2. Tbilisi, 1982, p. 39 - 40.

123. Методы аналитической оценки показателей надежности восстанавливаемых систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: О-во "Знание" УССР, 1983. — 15 с.

124. Показательные неравномерные оценки для классических ранговых статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 2, с. 12 - 17.

125. Функционалы на периоде занятости системы $M/G/1/\infty$. / С.В. Белоусова, В.С. Королюк. — В кн.: Применение аналитических методов в теории вероятностей. К.: Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 4-12.

126. Центральная предельная теорема для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями / В.С. Королюк, В.В. Королюк. — Укр. мат. журн., 1983, т. 35, № 6, с. 760-763.

127. Limit theorems for Markov random evolutions in the scheme of asymptotic state lumping / V.S. Koroljuk, A.F. Turbin — In: Probability theory and math, statistics: Proc. of the IV USSR- Japan symp., Tbilisi, Aug. 23-29, 1982. Berlin: Springer, 1983, p. 326-332. (Lecture notes in mathematics, vol. 1021).

128. Асимптотический анализ решений сингулярно возмущенных эволюционных уравнений / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. [Киев, 30 авг. – 6 сент. 1981 г.]. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. К.: Наук, думка, 1984, с. 183 - 189.

129. Длина очереди при критической загрузке в системе с полумарковским обслуживанием / С.В. Белоусова, В.С. Королук. — В кн.: Предельные теоремы в схеме асимптотического фазового укрупнения. К., 1984, с. 16 - 20. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики АН УССР; 84.16).

130. Метод потенциала в исследовании системы обслуживания $G1|M|1| \infty$ / Т.К. Бутко, В.С. Королук. — В кн.: Аналитические методы в задачах теории вероятностей. К.: Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 16-27.

131. Неоднородные пуассоновские процессы с полумарковскими переключениями в схеме фазового укрупнения / В.С. Королук, В.В. Королук. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 1, с. 21 -24.

132. Предельные теоремы для полумарковских эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения / В.С. Королук, А.В. Свищук. — В кн.: Предельные теоремы в схеме асимптотического фазового укрупнения. К., 1984, с. 3 - 15. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.16).

133. Слабая сходимость полумарковских процессов в схеме фазового укрупнения / В.С. Королук, Т.В. Чмиль. — Там же, с. 21-33.

134. Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления / В.С. Королук, Б. Пирлиев. — Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 4, с. 433 - 436.

135. Фазовое укрупнение полумарковских случайных эволюции / В.С. Королук, А.В. Свищук. — В кн.: Стохастическая оптимизация. [Международ. конф. Киев, 9-16 сент. 1984 г.:] Тез. докл. Ч. 1. Киев, 1984, с. 127 - 129.

136. Разложения для U-статистик и функционалов Мизеса / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1985. — 37, № 4. — с. 450 - 456.

137. Приближения невырожденных U-статистик / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Теория вероятн. и прим. — 1985. — 30, №3. с.417-426.

138. Резольвента однородного процесса с независимыми приращениями, обрывающегося на средней линии / Н.С. Братийчук, В.С. Королук — Теория вероятн. и прим. —1985. — 30, №2. — с.368-372.

139. Markov renewal processes in reliability analysis / Semi-Markov models (Brussels, 1984). — Plenum, New York, 1986. — p.217 - 230.

140. Контролируемые марковские процессы восстановления с малыми вероятностями обрыва / В.С. Королук, Н.В. Андреев. — Кибернетика.— 1986. — № 4. — с. 112-114.

141. Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций / В.С. Королук, А.В. Свищук — Укр. матем. журн. — 1986. — 38, №3. — с. 330 - 334.

142. Анализ функционирования марковских автоматов в случайных средах / В.С. Королук, А.И. Плетнев, С.Д. Эйдельман — Докл. АН СССР, — 1986, — 287, №5. — с. 1084- 1088.

143. Мартингалные выражения для распределения уклонения оценки плотности / В.С. Королук, О. Меляева — Укр. матем. журн., — 1986. — 38, №1, — с. 105-107.

144. Функциональная предельная теорема для квадрата среднего уклонения оценки плотности / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Асимптотические методы исследования стохастических моделей. — К.: Инст. матем. АН УССР, 1987. — с.81 - 84.

145. Эволюции систем в полумарковских случайных средах / Кибернетика. — 1987. — №5. — с. 107 -110.

146. Центральная предельная теорема в схеме фазового укрупнения для полумарковских случайных эволюций / В.С. Королук, А.В. Свищук, В.В. Королук — Укр. матем. журн. — 1987. — 39, №3. с. 316-321.

147. Слабая сходимость U-статистик к мультипликативным стохастическим интегралам в гильбертовом пространстве / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1987. — №4, — с.9-13.

148. Центральная предельная теорема для U-статистик в гильбертовом пространстве / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1987. — №3. — с.16 -19.

149. Предельное выражение U-статистики мультипликативным интегралом Ито-Винера / Докл. АН УССР, Сер. А. — 1987. — №2. — с. 6-18.

150. Теорема Гливленко для многовыборочной U-статистической эмпирической функции распределения / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Аналитические методы в вероятностных задачах. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1988. — с.60 - 62.

151. Аппроксимация многовыборочных UB-статистик / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Киев, 1988. — 48 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т матем.; 88.72).

152. Аппроксимация невырожденных UN-статистик / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Киев, 1988. — 40 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т матем.; 88.35).

153. Semi-Markov random evolutions — phase aggregation and applications / V.S. Koroljuk, A.V. Swishchuk — Fifth International Summer School on Probability Theory and Mathematical Statistics (Varna, 1985). — Publ. House Bulg. Acad. Sci., Sofia. — p. 156 - 170,

154. Статистики Мизеса со значениями в гильбертовом пространстве / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1988. — №11. — с. 15 -18.

155. Неравномерное выражение для скорости сходимости УН-статистики / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1988. — №10. — с.20 - 22.

156. Эволюционный оператор неавтономного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве / В.С. Королук, Я.Д. Плоткин, А.Ф. Турбин — Асимптотические методы в математической физике. — К.: Наук, думка, 1988. — с.118 -126.

157. Диффузионная аппроксимация восстанавливаемой резервированной марковской системы / В.С. Королук, Л.В. Ваврикович — Кибернетика. — 1988. — №5. — с.97 -100.

158. Мартингальная аппроксимация / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — К.: Наук, думка, 1988. — 247 с.

159. Асимптотическая теория U-статистик / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1988. — 40, №2. — с.169 - 182.

160. Скорость сходимости вырожденных функционалов Мизеса / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Теор. вероятн. и прим. — 1988, — 33, №1. — с.136- 146.

161. Многомерный эмпирический процесс U-статистики / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1988. — №2, —с.12-15.

162. Автоматы. Случайные блуждания. Игры / В.С. Королук, А.И. Плетнев, С.Д. Эйдельман — Успехи матем. наук. — 1988. — 43, №1(259). —с. 87-122.

163. A central limit theorem for semi-Markov random evolutions / Conference on optimisation in stochastic systems, CSPPE-1988. — Debrecen, Hungary, 1988. — p.32 - 35.

164. Асимптотика статистики Манья / Теория вероятностей и математическая статистика. Труды Тбилисского математического института АН ГрССР. — 1989. — 92. — с.161 - 163.

165. УН-статистики / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН СССР. — 1989. — 308, №6. —с. 1301 - 1304.

166. Контроль марковского процесса восстановления с малой вероятностью поглощения / Н.В. Андреев, В.С. Королук — Кибернетика. — 1989. — №5. — с. 128 -129.

167. Предельное представление непрерывной полумарковской случайной эволюции в схеме серий / В.С. Королук, А.В. Свищук — Укр. матем. журн. — 1989. — 41, №11. — с.1476 -1482.

168. Центральная предельная теорема для неоднородной полумарковской случайной эволюции / В.С. Королук, А.В. Свищук — Укр. матем. журн. — 1989. — 41, №8. — с. 1064 - 1070.

169. Закон компактности для повторного логарифма УН-статистики / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1989. — 41, №5. — с.672 - 676.

170. Теория U-статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — К.: Наук, думка, 1989. — 384 с.
171. Пограничный слой в асимптотическом анализе случайных блужданий / Теор. вероятн. и прим. — 1989. — 34, №1. — с.208 - 215.
172. Фазовое усреднение неоднородных полумарковских случайных эволюций / В.С. Королюк, А.В. Свищук — Укр. матем. журн. — 1989. — 41, №2. — С.163 -170.
173. Закон повторного логарифма для U-статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1989. — 41, №1. — с.97 -100.
174. Weak convergence of semi-Markov random evolutions (martingale approach) / V.S. Koroljuk, A.V. Swishchuk — Probability theory and mathematical statistics, Vol. II (Vilnius, 1989). — Vilnius: Mokslas, 1990, — p. 1-9.
175. Алгебраическая декомпозиция и асимптотики перманентов случайной матрицы / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Асимптотические и прикладные проблемы в теории случайных эволюций. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1990. — с.68 - 74.
176. U-статистики с растущими степенями / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Докл. АН СССР. — 1990. — 314, №3. — с.547 - 551.
177. U-статистики от бутстреп выборки / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1990. — 42, №10. — с.1403 - 1406.
178. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для УН-статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн, — 1990, —42, №8, —с. 1043- 1050.
179. Стабильность автономной динамической системы с быстрым марковским переключением / Докл. АН УССР, Сер. А. — 1990. — №6. — с.16-19.
180. Элементарный симметричный бутстреп-полином / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1990. — №5. —с.9- 12.
181. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для УН-статистик / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — ТВИМС. —1990. — №43. — с. 72 - 78.
182. Оценка близости моментов УН-статистик в условиях центральной предельной теоремы / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — ТВИМС. — 1990. — №42. —с.48 - 53.
183. Слабая сходимость полумарковской случайной эволюции в схеме усреднения / В.С. Королюк, А.В. Свищук — ТВИМС. — 1990, — №42, —с.53-64.
184. U-статистики с растущими степенями / В.С. Королюк, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1990. — №3. — с. 3 - 7.

185. Случайные симметричные полиномы с растущими степенями / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР, Сер. А. — 1990.— №4, —с.10-13.

186. Central limit theorem for semi-Markov random evolutions / Comput. Math. Appl. — 1990. — 19, №1. — p.83 - 88.

187. ЦПТ для неоднородных процессов с независимыми приращениями и полумарковскими переключениями / Укр. матем. журн.— 1991.— 43, №1.— с. 134- 137.

188. Случайные перманенты и симметричные статистики / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Киев, 1991. — 61 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т матем.; 91.12).

189. Устойчивость автономной динамической системы с быстрым марковским переключением / Укр. матем. журн. — 1991. — 43, №9, — с. 1176-1181.

190. Слабая сходимость распределений УН-статистик к устойчивым законам / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Теор. вероятн. и прим. — 1991. — 36, №3. — с.577 - 580.

191. Устойчивость импульсного эргодического марковского воздействия / В.С. Королук, А.К. Алчев — Укр. матем. журн. —1991. — 43, №5. — с.601 - 606.

192. U-статистики растущих степеней с асимптотически пуассоновскими распределениями / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН УССР. — 1991. — №4. — с.29 - 32.

193. U-статистики с растущими степенями / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Киев, 1991. — 36 с. — (Препр./АН УССР. Ин-т матем.; 91.3).

194. Нормальная аппроксимация производящей функции случайных перманентов / Ю.В. Боровских, В.С. Королук — Случайные эволюции: теоретические и прикладные проблемы. — К.: Ин-т матем. АН Украины, 1992. — с. 5 - 9.

195. Random permanents and symmetric statistics / V.S. Korolyuk, Yu.V. Borovskikh — Probability theory and mathematical statistics (Kiev, 1991). — World Sci. Publ. — p. 176 - 187.

196. Производящая функция перманентов проекционных матриц / В.С. Королук, Ю.В. Боровских — Докл. АН Украины. — 1992. — №7, — с.30-35.

197. Diffusion approximation of Markov queueing systems and networks / V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk — Systems and networks: mathematical theory and applications, Vol. I (Regensburg, 1993). — Math. Res., 77, Akademie-Verlag, Berlin. — p.209 - 230.

198. Стохастичні поліноми Кравчука / Допов. АН України. — 1993. — №6. — с.34-37.

199. О нормальной аппроксимации в банаховом пространстве L^p / В.С. Корольюк, Ю.В. Боровских — Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — К.: Ін-т матем. АН України, 1994. — с.168 - 180.
200. Random permanents and symmetric statistics / Y.V. Borovskikh, V.S. Korolyuk — Acta Appl. Math. — 1994. — 36, №3. — p.227 - 288.
201. Average and stability of dynamical systems with rapid stochastic switchings / Exploring stochastic laws. — Utrecht : VSP, 1995. — p.219-232.
202. Diffusion approximation of stochastic Markov models with persistent regression / V.S. Korolyuk, D.V. Korolyuk — Укр. матем. журн. — 1995. — 47, №7. — с.928 - 935.
203. Нормальная аппроксимация случайных перманентов / В.С. Корольюк, Ю.В. Боровских — Укр. матем. журн. — 1995. — 47, №7. — с.922 - 927.
204. Время пребывания полумарковского случайного блуждания с положительным сносом на полуоси / В.С. Корольюк, Л.М. Драбкин, С.А. Музрапов — Допов. НАН України. — 1995. — №1. — с.27 - 29.
205. Случайные перманенты смешанных выборочных матриц / Е.Ю. Канева, В.С. Корольюк — Укр. матем. журн. — 1996. — 48, — №1. — с.44 - 49.
206. Stability of stochastic systems in diffusion approximation scheme / Plenary lectures on the third Bogolyubov reading, 18-23 August 1997, Kiev, Ukraine.
207. Асимптотический анализ в граничных задачах для случайных блужданий (исторический обзор) / Теор. ймов. та матем. стат. — 1997. — 56, — с.1-9.
208. Singularly perturbed stochastic systems / Укр. матем. журн. — 1997, — 49, №1, — с.25-34.
209. Asymptotic analysis of boundary problems for random walks: historical survey / The second Scandinavian-Ukrainian Conference in mathematical statistics, 18-13 June 1997, Umea, Sweden. — p.44.
210. Boundary layer in asymptotic analysis for random walks / Proceedings of the Donetsk Colloquium on Probability Theory and Mathematical Statistics (1998). — Theory Stoch. Process. — 1998. — 4, №1-2. — p.25-36.
211. Diffusion approximation of integral functionals in merging and averaging scheme / V.S. Korolyuk, N. Limnios — Теор. ймов. та матем. стат. — 1998. — №59. — с.99 - 105.
212. A singular perturbation approach for Liptser's functional limit theorem and some extensions / V.S. Korolyuk, N. Limnios — Теор. ймов. та матем. стат. — 1998. — 58. — с.76 - 80.
213. Stability of stochastic systems in diffusion approximation scheme / Укр. матем. журн. — 1998. — 50, №1. — с.36 - 47.

214. Average and stability of dynamic systems with rapid stochastic switching / XVIII seminar on stability problems of stochastic systems, 1997, Debrecen, Hungary. — Теор. вероятн. и прим. — 1998.

215. Ruin problems for semi-Markov random walk / V.S. Korolyuk, N.S. Bratijchuk— VII International Vilnius conference on probability and statistics, 12-18 August 1998. — p.281.

216. Diffusion approximation of integral functionals in double merging and averaging scheme / В.С. Корольюк, Н. Лімніос — Теор. ймов. та матем. стат. — 1999. — 60. — с.77 - 84.

217. Semi-Markov random walks / Semi-Markov models and applications (Compiègne, 1998). — Kluwer Acad. Publ., 1999. — p.61 - 75.

218. Markovian repairman problems. Classification and approximation / V.S. Korolyuk, N.A. Derzko, V.V. Korolyuk — Statistical and probabilistic models in reliability (Bucharest, 1997). — Boston: Stat. Ind. Technol., Birkhauser Boston, MA, 1999. — p.143 -151.

219. Stochastic models of systems in reliability problems / Statistical and probabilistic models in reliability (Bucharest, 1997). — Boston : Stat. Ind. Technol., Birkhauser Boston, MA, 1999. — p.127 -141.

220. Stationary distribution for repairable systems / H. Chetouani, V.S. Korolyuk — Appl. Stoch. Models Bus. Ind. — 2000. — 16, №3. — p. 179- 196.

221. Evolutionary systems in an asymptotic split phase space / V.S. Korolyuk, N. Limnios — Recent advances in reliability theory (Bordeaux, 2000). — Boston: Stat. Ind. Technol., Birkhauser Boston, MA, 2000. — p.145-161.

222. Пуасонівська апроксимація однорідного адитивного випадкового функціонала з напівмарковськими перемиканнями / В.С. Корольюк, Н. Лімніос — Теор. ймов. та матем. стат. — 2001. — №64, —с.66-74.

223. Stochastic Integral Functionals in a asymptotic Split State Space / V.S. Korolyuk, N. Limnios — Probability and Statistical Models with Applications. Ch.A. Charalambides, M.V. Koutras and N. Balakrishnan (Eds). — Chapman andHall/GRC, 2001. — p. 155 - 168.

224. Stability of dynamic system with semi-Markov switching in the conditions of averaging system stability / Ja.M. Chabanyuk, V.S. Korolyuk — Abstracts of communications of the International conference. Stochastic analysis and its applications, Lviv, Ukraine, 2001. — p.34.

225. Markov additive processes in a phase merging scheme / V.S. Korolyuk, N. Limnios — Proceedings of the Conference Dedicated to the 90th Anniversary of Boris Vladimirovich Gnedenko (Kyiv, 2002). — Theory Stoch. Process. — 2002. — 8, № 3-4. — p.213 - 225.

226. Стійкість динамічної системи з напівмарковським перемиканням за умови стійкості усередненої системи / В.С. Корольок, Я.М. Чабанюк — Укр. матем. журн. — 2002. — 54, №2. — с.195 - 201.

227. Стаціонарне фазове укрупнення суперпозиції двох процесів відновлення / В.С. Корольок, Г.В. Мамонова — Допов. НАН України. — 2003. — №5. — с.21 - 25.

228. Increment processes and its stochastic exponential with Markov switching in Poisson approximation scheme / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Applied stochastic system modeling (Kyoto, 2000). — Comput. Math. Appl. — 2003. — 46, №7. — p.1073 -1079.

229. Semi-Markov random walk in asymptotic scheme / V.S. Koroliuk — Proceeding of the International Conference KONBIN'03. — 2003. —v.2. p. 129-137.

230. Semi-Markov random walk in Poisson approximation scheme. Semi-Markov processes: theory and applications / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Comm. Statist. Theory Methods. — 2004. — 33, №3, — p.507-516.

231. Average and diffusion approximation of stochastic evolutionary systems in an asymptotic split state space / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Ann. Appl. Probab. — 2004. — 14, №1. — p.489 - 516.

232. Compound Poisson Approximation with Drift for Stochastic Additive Functionals with Markov and Semi-Markov Switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Recent Advances in Applied Probability, Baeza-Yates, R.; Glaz, J.; Gzyl, H.; Husler, J.; Palacios, J.L. (Eds.). — Kluwer, 2004.

233. Diffusion approximation of evolutionaiy systems with equilibrium in asymptotic split phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Теор. ймов. та матем. стат. — 2004. — 69. — с. 66 - 76.

234. Poisson approximation of increment procesess with Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Теор. вероятн. и прим. — 2004. — 49, №4. — с.1 -18.

235. Розвиток ідей М. Кравчука в теорії ортогональних многочленів / В.С. Корольок, В.Л. Макаров, В.В. Строк — X міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13-15 травня 2004). —с.505

236. Оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предисторией с пуассоновскими переключениями / В.С. Корольок, В.К. Ясинский, С.В. Антонюк —Кибернетика и системный анализ. — 2004. — 40, №6. — с. 112-118.

237. Levy approximation of increment processes with Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Stoch. Stoch. Rep. — 76 (2004) — no. 5. — 383-394.

238. Стохастичні системи з усередненням в схемі дифузійної апроксимації / Укр. матем. журн. — 2005. — 57, №9. — с. 1235 -1252.

239. Diffusion approximation with equilibrium of evolution systems switched by semi-Markov process / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Укр. матем. журн. — 2005. — 57, №9. — с. 1253 - 1260.

240. Ruin probability for stochastic risk models / S. Albeverio, M.S. Bratiichuk, V.S. Koroliuk — Preprint Bonn Univ., № 215. — 2005. — 36 p.

241. Про деякі проблеми страхування в ядерній енергетиці / Безпека життєдіяльності. — В.С. Корольок, М.О. Кононеко, В.О. Гасаненко — 2005. — с.6 - 10.

242. Queuing systems with semi-Markov flow in the average and diffusion approximation schemes / V.S. Koroliuk, V.V. Koroliuk, N. Limnios — Proceedings KONBIN'06, 2006, 6 p.

243. On stochastic stability of Markov evolution associated with impulse Markov dynamical systems / Je. Carkovs, V.S. Koroliuk — Теор. ймов. та матем. стат. — 2006. — 75. — p.60-64.

244. Asymptotic expansion of semi-Markov random evolution / S. Albeverio, V.S. Koroliuk, I.V. Samoilenko — Preprint Bonn Univ. № 277. — 2006. — 23 p.

245. Compound Poisson approximation with drift for stochastic additive functionals with Markov and semi-Markov switching. Recent advances in applied probability / Springer, 2006. — p.279 -297.

246. Diffusion approximation algorithms in merging phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Theory of Stoch.Proc. — 29, 2007. — № 1-2, — p. 98- 102.

247. Fluctuation of stochastic systems with an average equilibrium point competes / V.S. Koroliuk, N. Limnios, Ya.M. Chabanyuk — Rendus Acad. Sci. Paris. — ser 1345. — 2007.

248. Problem of singular perturbation in analysis of stochastic systems / International conference "Skorokhod Space, 50 years on" — 2007. — II. — p. 43.

249. Stability of stochastic systems in diffusion approximation scheme / International conference "Lyapunov Memorial conference" — 2007. — Kharkov. — p.82.

250. Прикладна математика: Аналітичний та евристичний підходи. Сучасна математика і математична освіта / Київ. — 2007. — с.31-35.

251. The first integrals in diffusion approximation scheme / V.S. Koroliuk, N. Limnios — Applied Mathematics Letters (AML). — 21, 2008. — 227-231 p.

252. Устойчивость диффузионных стохастических функционально-дифференциальных уравнений с марковскими параметрами / В.С. Корольок, В.К. Ясинский, И.В. Юрченко — Кибернетика и системный анализ. — №1, 2008, — с.73-88.

253. Процеси накопичення в схемі пуассонівської апроксимації / Мат. методи та фіз.-мех. поля. — т.51, №2. — 2008. — с.26 - 33.

254. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последствием при наличии марковских параметров. Часть I. / В.С. Королук, В.И. Мусурицкий, В.К. Ясинский — Проблемы управления и информатика. — №1. — 2008, — с. 16-35.

255. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последствием при наличии марковских параметров. Часть II / В.С. Королук, В.И. Мусурицкий, В.К. Ясинский — Проблемы управления и информатика. — №3. — 2008.— с. 5-20.

256. Poisson approximation of processes with locally independent increments and Markov switching / Abstract, 4-th International Workshop on Applied Probability, Compiègne, France. — 2008. —p. 142.

IV. НАУКОВО-ПОПУЛЯРНІ ПУБЛІКАЦІЇ

1. Борис Владимирович Гнеденко: (К 50-летию со дня рождения) / И.И. Гихман, А.Н. Колмогоров, В.С. Королук. — Успехи мат. наук, 1962, т. 17. вып. 4, с. 191 - 200.

2. Масове обслуговування — математична задача / В.С. Королук, С.М. Броді. — Наука і життя, 1963, № 10, с. 6 -7.

3. О зимней школе по теории вероятностей. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 4, с. 569.

4. Чи потрібно знову "відкривати Америку". — Веч. Київ, 1965, 15 лют.

5. Вариационный ряд: Заоч. семинар "Стат. методы и вопросы точности и надежности". — К.: О-во "Знание". УССР, 1967 — 22 с.

6. Статистичний аналіз у техніці / В.С. Королук, Б.Г. Марченко, С.М. Броді. — К.: Т-во "Знання" УРСР. — 48 с.

7. Гносеологічний зміст теоретико-ймовірносних понять / В.С. Королук, А.В. Скороход — Філософські проблеми сучасного природознавства, 1967, вип. 7, с. 64 - 70.

8. Теория вероятностей и математическая статистика в Институте математики АН УССР. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 6, с. 93-96.

9. Теорія ймовірностей / Б.В. Гнеденко. В.С. Королук. — В кн.: Історія Академії наук Української РСР. Кн. I. К.: Голов, ред. УРЕ, 1967, с. 449-453.

10. Юрий Алексеевич Митропольский: (К 50-летию со дня рождения) / В.М. Глушков, О.С. Парасюк, В.С. Королук, О.Б. Лыкова. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 1, с. 3 - 8.

11. Иосиф Ильич Гихман: (К 50-летию со дня рождения) / И.И. Данилюк, В.С. Королук, Ю.А. Митропольский, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. — Укр. мат. журн., 1968, т. 20, № 3, с. 363 - 366.

12. О работе VI математической школы / Д.В. Гусак, А.Н. Деменин, В.С. Королук — Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 2, с. 281.
13. Математическая статистика. — В кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 2. К.: Наук, думка, 1970, с. 45 - 51.
14. Гіхман Йосип Ілліч, Скороход Анатолій Володимирович / Ю.О. Митропольський, В.С. Королук. — Вісн. АН УРСР, 1971, № 8, с. 105-107.
15. Наука о случайном. — Под знаменем ленинизма, 1971, № 16, с. 56-58.
16. Рекомендації чи дезорієнтація? / В. Королук, А. Скороход, О. Боярчук, М. Ядренко, В. Вишенський. — Рад. освіта, 1971, 9 черв.
17. Інформація в науці і техніці. — В кн.: Наука і культура. Україна 1974. К.: Т-во "Знання" УРСР, 1974, с. 80—88.
18. Полумарковские процессы и их применение / В.С. Королук, С.М. Броди, А.Ф. Турбин. — В кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Мат. статистика, Теор. кибернетика, т. 11, М.: ВИНТИ, 1974, с. 47 - 97.
19. Анализ асимптотически укрупняемых сложных систем / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. К.: Наук, думка, 1975, с. 46 - 65.
20. Институт математики АН УССР к 60-летию Великого Октября / Ю.А. Митропольский, В.С. Королук, В.Н. Шевело. — Укр. мат. журн., 1977, т. 29, № 6, с. 715 - 732.
21. Исследования Ю.А. Митропольского в области теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, В.С. Королук, — Укр. мат. журн., 1977, т. 29, № 1, с. 3 - 14.
22. Юрий Алексеевич Митропольский: (К 60-летию со дня рождения) / Н.Н. Боголюбов, В.С. Королук, А.М. Самойленко. — Успехи мат. наук, 1977, т. 32, вып. 1, с. 217 - 228.
23. Юрий Алексеевич Митропольский: (К 60-летию со дня рождения) / Н.П. Еругин, В.С. Королук, О.Б. Лыкова. — Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 1, с. 177 - 184.
24. Иосиф Ильич Гихман: (К 60-летию со дня рождения) / В.С. Королук, Ю.А. Митропольский, А.В. Скороход — Успехи мат. наук, 1978, т. 33, вып. 5, с. 205 - 208.
25. Нові рубежі математичної науки. — Вісн. АН УРСР, 1979, № 5, с. 75 - 76.
26. Теория вероятностей / В.С. Королук, А.В. Скороход. — В кн.: История Академии наук Украинской ССР. К.: Наук. думка, 1979, с. 54-58.
27. Михаил Алексеевич Лаврентьев: Некролог / Ю.А. Митропольский, В.С. Королук, А.Н. Боголюбов. — Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 861 - 864.

28. О работах А.В. Скорохода по теории случайных процессов / Ю.А. Митропольский, В.С. Королук, В.С. Михалевич, И.Н. Коваленко. — Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 4, с. 523 - 527.
29. Логіко-методологічні аспекти укрупнення складних систем / В.С. Королук, Д.Т. Кривенко. — Вісн. АН У РСР, 1982, № 9, с. 17-24.
30. Математика — інженеру. — Веч. Київ, 1982, 4 жовт.
31. Створення і впровадження сучасних математичних методів оптимізації. — Вісн. АН УРСР, 1982, № 3, с. 101 - 103.
32. Сучасні досягнення теорії ймовірностей. — В кн.: Наука і культура. Україна, 1981. К.: Т-во "Знання" УРСР, 1982, с. 120- 123.
33. Теорія ймовірностей / В.С. Королук, А.В. Скороход. — В кн.: Історія Академії наук Української РСР. К.: Наук, думка, 1982, с. 54-57.
34. Математика в современном мире. — В кн.: Математика сегодня: Науч. сб. К.: Вища шк., 1983, с. 12 - 16.
35. Исследования по теории вероятностей в Институте математики АН УССР за пятьдесят лет / В.С. Королук, А.В. Скороход. — Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 5, с. 571 - 575.
36. Некоторые вопросы методологии математики и математизации знаний / В.С. Королук, В.Н. Шевело — Гносеологический анализ математизации науки. — К.: Наук, думка, 1985. - с. 101 - 106.
37. Юрий Алексеевич Митропольский (по случаю его семидесятилетия) / Н.П. Еругин, В.С. Королук, О.Б. Лыкова — Дифференциальные уравнения. — 1987. — 23, № 1. — с. 3 - 9.
38. Исследования А.В. Скорохода в области предельных теорем для случайных процессов и теории стохастических дифференциальных уравнений / В.С. Королук, Н.И. Портенко — Укр. матем. журн. — 1990. — 42, № 9. — с. 1157 - 1170.
39. Анатолий Владимирович Скороход (по случаю шестидесятилетия) / В.С. Королук, Н.И. Портенко, Г.Н. Сытая — Успехи матем. наук. — 1991. — 46, № 4(280). — с. 179- 182.
40. Самуил Давыдович Эйдельман (по случаю семидесятилетия) / Ю.М. Березанский, М.Л. Горбачук, С.Д. Ивасишин, В.С. Королук, Ю.А. Митропольский — Укр. матем. журн. — 1991.— 43, № 5. — с. 675.
41. Зародження теорії ймовірностей в Україні / Теор. ймов. та матем. стат. — 1993. — № 49. — с. 17 -19.
42. Про математичну творчість В.М. Шуренкова / В.С. Королук, М.Й. Ядренко, М.В. Карташов, Н.В. Москальцова — Теор. ймов. та матем. стат. — 1996. — № 52. — с. 1 - 8.
43. Леонід Павлович Ніжнік (з нагоди шістдесятиріччя) / Ю.М. Березанський, В.І. Горбачук, М.Л. Горбачук, В.С. Королук, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, В.Г. Тарасов — Укр. матем. журн. — 1995. — 47, № 10. — с. 1416 - 1417.

44. Юрій Львович Далецький (з нагоди сімдесятиріччя) / Ю.М. Березанський, В.С. Королук, С.Г. Крейн, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, А.В. Скороход, І.В. Скрипник — Укр. матем. журн. — 1997. — 49, № 3. — с. 323 - 325.

45. Ігор Володимирович Скрипник (з нагоди сімдесятиріччя) / А.М. Самойленко, Ю.О. Митропольський, В.С. Королук — Укр. матем. журн. — 2000. — 52, № 11. — с. 1443 - 1445.

46. Коментарі до статті "Вклад В.С. Королюка в розвиток теорії ймовірностей (Укр. матем. журн. — 2000. — 52, № 8. — с. 1014 - 1030)" Д.В. Гусака, М.С. Братійчук, А.В. Свіщука / Укр. матем. журн. — 2000. — 52, № 8. — с. 1031 - 1033.

47. Анатолій Володимирович Скороход (з нагоди сімдесятиріччя) / І.М. Коваленко, В.С. Королук, М.І. Портенко, А.М. Самойленко, Г.М. Сита, М.Й. Ядренко — Укр. матем. журн. — 2000. — 52, № 9. — с. 1155 - 1157.

48. Творчий шлях В.С. Королюка в запитаннях та відповідях / Н. Балакришнан, Н. Лімніос, В.С. Королук — Теор. ймов. та матем. стат. — 2001. — № 64. — с. 3 - 9.

49. Міжнародна конференція, присвячена 90-річчю Б.В. Гнеденка / В.С. Королук, М.Й. Ядренко, Н.М. Зінченко — Укр. матем. журн. — 2002. — 54, № 2. — с. 1720 - 1722.

50. Speech at the opening session / Proceedings of the Conference Dedicated to the 90th Anniversary of Boris Vladimirovich Gnedenko (Kyiv, 2002). — Theory Stoch. Process. — 2002. — 8, № 1-2, —р. 1 - 3.

51. Микола Іванович Шкіль (з нагоди сімдесятиріччя) / Ю.М. Березанський, В.С. Королук, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, А.В. Скороход, І.В. Скрипник — Укр. матем. журн. — 2002. — 54, № 12. — с. 1589 - 1591.

52. Анатолій Володимирович Скороход (до 75-річчя від дня народження) / В.С. Королук, А.М. Самойленко, М.І. Портенко, Г.М. Сита — Укр. матем. журн. — 2005. — 57, № 9. — с. 1158-1162.

53. Іван Олександрович Луковський (до 70-річчя від дня народження) / Укр. матем. журн. — 2005. — 57, № 10.

V. РЕДАГУВАННЯ

1. Ред.: Теория вероятностей и ее применения. — М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 1, № 2—4. — Зам. гл. ред.

2. Ред.: Теория вероятностей и ее применения. — М.: Изд-во АН СССР, 1957, т. 2, № 1—4. — Зам. гл. ред.

3. Ред.: Теория вероятностей и ее применения. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, № 1. — Зам. гл. ред.

4. Ред.: Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике, Ужгород, 1964 г. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1964. — 263 с. — Отв. ред.

5. Ред.: Труды шестой летней математической школы по теории вероятностей и математической статистике / Отв. ред. В.С. Королук, А.В. Скороход. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1969. — 326 с. — Отв. ред.

6. Ред.: Енциклопедія кібернетики: В 2-х т. К.: Голов. ред. УРЕ, 1973. Т. 1. — 583 с.; Т. 2. — 573 с. — Чл. редкол.

7. Ред.: Энциклопедия кибернетики: В 2-х т. К.: Гл. ред. 1974. — Т. 1. 607 с.; Т. 2. 619 с. — Чл. редкол.

8. Ред.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. — К.: Наук, думка, 1975. — 255 с. — Чл. редкол. Предисловие. — Там же, с. 3—4.

9. Ред.: Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. К.: Техника, 1975. — 766 с. — Управляющие системы и машины, 1977, вып. 2, с. 139—140.

10. Ред.: Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук, думка, 1977. — 251 с. — Отв. ред.

11. Ред.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — К.: Наук, думка, 1977. — 273 с. — Отв. ред.

12. Ред.: Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — К.: Наук, думка, 1977, — 295 с. (на укр. яз.). — Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 1, с. 139.

13. Ред.: Математический анализ и теория вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Наук, думка, 1978. — 202 с. — Отв. ред.

14. Ред.: Справочник по теории вероятностей и математической статистике. См. I, № 9. — Ред.

15. Ред.: Физико-технические приложения краевых задач. — К.: Наук, думка, 1978. — 238 с. — Отв. ред. Предисловие. — Там же, с. 3.

16. Ред.: Аналитические методы в теории вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Наук, думка, 1979. — 149 с. — Отв. ред. Предисловие. — Там же, с. 3—4.

17. Ред.: Методы и средства моделирования физических процессов: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. — 157 с. — Отв. ред.

18. Ред.: Решение краевых задач средствами математического моделирования: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. — 115 с. — Отв. ред.

19. Ред.: Аналитические методы исследований в теории вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. — 149 с. — Отв. ред. Предисловие. — Там же, с. 3—4.

20. Ред.: Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом /

С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Ю.П. Пидченко, Н.А. Сотниченко. — К.: Наук, думка, 1981. — 296 с. — Отв. ред.

21. Ред.: Митропольский Ю.А., Молчанов А.А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. — К.: Наук, думка, 1981. — 238 с. — Отв. ред;

22. Ред.: Петунин Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине / Отв. ред. В.С. Королюк, В.И. Скок. — К.: Наук, думка, 1981. — 320 с. — Отв. ред.

23. Ред.: Manual de la teoria de probabilidades y estadistica matematica. См. 1, № 9. — Ред.

24. Ред.: Прикладные задачи теории вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1982. — 148 с. — Отв. ред. Предисловие. — Там же, с. 3.

25. Ред.: Боголюбов А.Н. Математики. Механики: Биограф, справ. — К.: Наук, думка, 1983. — 640 с. — Отв. ред.

26. Ред.: Галицын А.С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. — К.: Наук. думка, 1983. — 236 с. — Отв. ред.

27. Ред.: Митропольский Ю.А., Хома Г.П. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — К.: Наук, думка, 1983. — 216 с. — Отв. ред.

28. Ред.: Применение аналитических методов в теории вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. 140 с. — Отв. ред. Предисловие. Там же, с. 3.

29. Ред.: Aide-memoire de theorie des probabilités et de statistique mathématique. См. 1, № 9. — Ред.

30. Ред.: Аналитические методы в задачах теории вероятностей: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. — 154 с. — Отв. ред. Предисловие. — Там же, с. 3.

31. Ред.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний, — К.: Наук, думка, 1984. — 455 с. — Чл. редкол.

32. Ред.: Цвсткович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и ее применение. — К.: Наук, думка, 1984. — 484 с. — Ред. Предисловие перевода / В.С. Королюк, В.В. Строк. — Там же, с. 5—6.

Науково-інформаційне
видання

Володимир Семенович Королук.
Творчий шлях

Біобібліографія

Упорядники: Н.Ф. Рябова, І.В. Самойленко
Комп'ютерний набір та оригінал-макет Н.Ф. Рядова
Редактор В.Е. Гонтковська

Підп. до друку 26.03.09 р. Формат 60х84/16. Офс. друк.
Фіз. друк. арк.23.3.Ум. друк, арк 21,7. Тираж 200 пр.Зам. 47

Інститут математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

Оригінал <http://www.icfcst.kiev.ua/MUSEUM/TXT/Korolyuk.pdf>